BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIV
D
30
NAPOLI

XIV

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

ARITHMETICA
INTRODVCTIO
AD
LOGISTICAM
Vniuerſæ Matheſi ſeruientem.

Digitized by Google

Digitized by Google

ÆGIDII FRANCISCI DE GOTTIGNIES

Bruxellenſis è Societate IESV
In Collegio Romano
MATHESEOS PROFESSORIS

ARITHMETICA INTRODVCTIO *AD* LOGISTICAM

Vniuerſæ Matheſi ſeruientem

CONTINENS

Vulgo vſitatam Arithmeticam practicam; atque ex hac, deriuationem Logiſticæ practicæ, pertinentis ad Arithmeticam.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

ROMAE, Typis Nicolai Angeli Tinaſſij. 1676.

SVPERIORVM PERMISSV.

Digitized by Google

ARGVMENTVM

Arithmeticæ Introductionis ad Logiſticam.

ARithmetica dicitur, ea pars Matheſeos, quæ pro obiecto habet quantitatem diſcretam; hæc Arithmetica diuiditur in ſpeculatiuam, & practicam; de Arithmetica practica hic agimus: quam duplicem conſideramus; alteram appellamus Arithmeticam noſtræ Logiſticæ, quia traditur in opuſculo quod inſcribitur Logiſtica; alteram dicimus vulgarem: non quia humile aut vulgare aliquid continet, ſed quia vulgo, ſiue paſſim, vſu recepta eſt. Vtrique iſti Arithmeticæ practicæ, commune eſt, aſſumere ſcriptiones, breuiter atque compendiatè repræſentantes numeros, vt circa illos commode inſtitui poſſint operationes Arithmeticæ; hoc eſt Additio, Subtractio, Multiplicatio, aut Diuiſio. In vario vſu iſtarum operationum, conſiſtit prædicta vtraque Arithmetica practica: atque inter illas propemodum nulla differentia inuenitur, quæ non dependeat à compendiatis ſcriptionibus: vtraque enim tantum cenſetur operationes ſuas inſtituere circa numeros quos repræſentat compendiata ſcriptione; & ab hac compendiata ſcriptione inter ſe diſtinguimus numeros vulgares, & Logiſticos. Etenim, ſupponendo quod per vnitatem ſimplicem, ſiue quod idem eſt, per vnitatem poſitiuam ſimplicem, intelligendum ſit illud, quod ex vi hypotheſis ſignificatur per vocem, vnum, ſimpliciter ſiue ſolitariè poſitam: numeros vulgares appellamus, qui repræſentantur per decem illas

las

Digitized by Google

las notas Arithmeticas, quarum ſignificationem exponimus in primo capite huius opuſculi; quæ notæ, ſiue ſolitariè, ſiue ſimul poſitæ, ratione ſui, aut loci, aut ordinis quo ſcribuntur, non repræſentant niſi vnitates poſitiuas ſimplices, ſiue integras, ſiue fractas atque ſubdiuiſas. Quare vulgaris Arithmetica dici poteſt, quæ verſatur circa ſolos numeros indicantes poſitiuas ſimplices vnitates, ſiue integras, ſiue fractas. Præter has vnitates poſitiuas ſimplices, nonnullas alias compendiata ſcriptione repræſentat, atque à prioribus, & inter ſe diſtinguit, Logiſtica noſtra; tales ſunt, vnitates denominatæ, quæ indicantur à numeris quos appellamus numeros denominatos. Deinde vnitates radicales, quæ indicantur à numeris qui radicales dicuntur. Denique vnitates negatiuæ, quæ à noſtris numeris negatiuis indicantur. De his conſuli poteſt primus liber noſtræ Logiſticæ, vel etiam poſterior pars huius opuſculi. Quare practica Logiſticæ noſtræ Arithmetica, dici poſſet, quæ verſatur circa quoslibet numeros Logiſticos.

In noſtra Logiſtica, aliunde cognita ſupponitur Arithmetica vulgaris, vel potius illa pars Arithmeticæ vulgaris, in qua traditur modus compendiate ſcribendi quemlibet numerum vulgarem, atque enuntiandi numerum vulgarem compendiata ſcriptione repræſentatum; ac præterea, modus inſtituendi Additionem, ſubtractionem, multiplicationem, & diuiſionem, circa propoſitos numeros vulgares. His aliunde ſuppoſitis, incipimus noſtram Logiſticam, à modo legendi compendiatas ſcriptiones Logiſticas. In præſenti opuſculo, prius exponitur illa pars Arithmeticæ vulgaris, quæ in noſtra Logiſtica aliunde cognita ſupponitur: deinde declaratur, quomodo ex vulgari Arithmetica, propemodum

dum ſingula deriuentur, quæ à nobis propoſita ſunt in primo Logiſticæ libro. Quoniam vero enumerata duo capita proponere, nihil aliud mihi videtur, quam viam ſternere, quæ à primis Arithmeticæ principijs ducit ad Logiſticam noſtram, atque ad illam aditum aperire: præſens opuſculum inſcribitur ARITHMETICA INTRODVCTIO AD LOGISTICAM. *Quid à me per Logiſticam ſignificetur: finis maxime arduus ac ſublimis in Logiſtica mihi propoſitus: facilis Logiſticæ vſus, atque non vulgares eius vtilitates: tum pro Arithmetica, tum pro Geometria, & Matheſi vniuerſa: melius intelligi poterunt ex altero opuſculo quod inſcribitur,* IDEA LOGISTICAE, SPECVLATIVE ET PRACTICE DECLARATA.

Ad ſcribendum vtrumque illud opuſculum, impulit me duplex experientia; nimirum, à me ſcriptam Logiſticam, & facile intelligi, & maxime prodeſſe auditoribus meis: eamdem tamen, alijs pluribus, videri difficilem, atque parum prodeſſe. Me in prima experientia non aberrare, teſtes ſunt, qui à me inſtituuntur in Mathematicis ſcientijs. De altera experientia, eamdem certitudinem non habeo: illam tamen cogor admittere, niſi velim fateri me neſcire quid ſcripſerim. Etenim virorum in Mathematicis verſatorum, non pauca teſtimonia ad me delata ſunt: aſſerentia, à me conſcriptam Logiſticam ſpecioſæ Algebræ compendium eſſe: quod aliqui teſtantur ſatis bene propoſitum: alij affirmant aliqua ex parte defectuoſum. Iam vero, vel Logiſtica noſtra Algebra eſt, vel non eſt Algebra; ſi primum, fateri cogor, & candide fateor, me, vel neſcire quid Algebra ſit, vel ignorare quid ſcripſerim. Si ſecundum, concedendum erit, viros in Mathemati-

cis

cis verſatos, perlecta noſtra Logiſtica, neſciuiſſe quid legerint; hactenus cogor hanc poſtremam partem admittere; qua ſuppoſita, ſi tam pernicioſæ temporis iacturæ cauſa ſit, quod clauſis vt ita dicam oculis ſcripta noſtra percurrant, culpa mea non eſt; ſi vero cauſetur ab aliquibus tenebris quæ in noſtra Logiſtica inueniuntur, non immerito à me requiri poterat maius lumen; vtinam illud quod affero, vel in hoc opuſculo, vel in noſtra Logiſticæ idea, proſit diſcentibus noſtram Logiſticam, & tamen moleſtum non ſit illorum oculis, qui tenebris, vel tenuiori lumini dudum aſſueti, atque contenti viuunt.

EGo Dominicus Brunaccius Societatis Ieſu, in Prouincia Romana Præpoſitus Prouincialis, poteſtate ad id mihi facta à Patre noſtro Generali Io. Paulo Oliua, facultatem facio, vt liber cui titulus *Arithmetica Introductio ad Logiſticam Vniuerſæ Matheſi ſeruientem*, à P. Aegidio Franciſco de Gottignies noſtræ Societatis Sacerdote conſcriptus, & eiuſdem Societatis doctorum virorum iudicio approbatus, typis mandetur, ſi ijs, ad quos ſpectat, ita videbitur. In quorum fidem has litteras manu mea ſubſcriptas, & ſigillo muneris mei ſignatas dedi. Romæ 7. Auguſti 1676. *Dominicus Brunaccius.*

Imprimatur,
Si videbitur Reuerendiſs. P. Mag. Sac. Pal. Apoſt.

I. de Ang. Archiep. Vrb. Viceſg.

Imprimatur,
Fr. Raymundus Capiſuccus Ordinis Prædicatorum Sac. Pal. Apoſt. Mag.

ARITH-

Digitized by Google

ARITHMETICAE VVLGARIS.

CAPVT PRIMVM:

De characteribus ſiue notis Vulgaris Arithmeticæ, atque illorum valore, & modo legendi numeros integros vulgares, talibus characteribus expreſſos.

VT compendiata, & commoda ſcriptione exhiberi poſſint numeri, circa quos operationes ſuas inſtituere docet Arithmetica, quam vulgarem appellamus: deſeruiunt decem characteres, qui aliter notæ, aut digiti, aut figuræ appellantur; ſunt autem ſequentes decem

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

Nota, 1. exprimitur per vocem vnum. Nota, 2. exprimitur per vocem duo. Nota, 3. exprimitur per vocem tria. Nota, 4. exprimitur per vocem quatuor. Nota, 5. exprimitur per vocem quinque. Nota, 6. exprimitur per vocem ſex. Nota 7. exprimitur per vocem ſeptem. Nota 8. exprimitur per vocem octo. Nota, 9. exprimitur per vocem nouem. Nota, 0. cifra dicitur, exprimitur per vocem nullus, aut nihil. Singulæ iſtæ notæ, duplicem valorem habere poſſunt: ex his duobus valoribus, vnus eſt valor proprius, quem nota habet ratione ſui; alter eſt valor localis, quem nota habet ratione loci, qui illi conuenit quando immediatè verſus leuam præcedit alias notas, ſubſequentes verſus dexteram.

Ratione ſui, 1. ſignificat vnam ſimplicem vnitatem, ſiue vnum; 2. ſignificat duas vnitates ſimplices, ſiue vnum binarium vnitatum ſimplicium; 3. ſignificat tres vnitates ſimplices, ſiue vnum ternarium vnitatum ſimplicium; 4. ſignificat quatuor vnitates ſimplices, ſiue vnum quaternarium vnitatum ſimplicium; 5. ſignificat quin-

que vnitates ſimplices, ſiue vnum quinarium vnitatum ſimplicium; 6. ſignificat ſex vnitates ſimplices ſiue vnum ſenarium vnitatum ſimplicium; 7. ſignificat ſeptem vnitates ſimplices, ſiue vnum ſeptenarium vnitatum ſimplicium; 8. ſignificat octo vnitates ſimplices, ſiue vnum octonarium vnitatum ſimplicium; 9. ſignificat nouem vnitates ſimplices, ſiue nouenarium vnitatum ſimplicium; 0. ſignificat nullam vnitatem ſimplicem, ſiue nihil.

Ratione loci, cuiuslibet notæ vel characteris valor proprius, toties in decuplum excreſcit, quot verſus dexteram ſubſequuntur characteres: exempli gratia, characteris, 8. valor proprius eſt octo, & ratione ſui ſignificat octo vnitates ſimplices: verum ſi hunc characterem 8. immediatè verſus dexteram ſubſequatur vnicus alius character, ſignificabit octuaginta vnitates ſimplices, ſiue octo decades vnitatum ſimplicium; hinc ſcriptio 80. legitur octuaginta; item ſcriptio 70. legitur ſeptuaginta; item ſcriptio 10. legitur decem; & ita de ceteris. Vbique ſubaudiuntur vnitatum ſimplicium indiuidua, ſiue vnitates ſimplices. Si characterem 8. verſus dexteram ſubſequantur duo characteres, ſed non plures: valor eius proprius bis in decuplum excreſcit, & ſignificabit octingenta, ſiue octo centena; hinc 800. legitur octingenta. 700. legitur ſeptingenta; 200. legitur ducenta; & ita de ceteris vbique iterum ſubaudiuntur indiuidua vnitatum ſimplicium, ſiue vnitates ſimplices; adeo vt vox octingenta, idem ſignificet ac ſi diceretur octingenta indiuidua vnitatum ſimplicium, ſiue octingentæ vnitates ſimplices. Ex his patet quod ſcriptio 864. legatur octingenta ſexaginta quatuor; etenim character 8. ratione ſui, & loci, ſignificat octingenta: item character 6. ratione ſui, & loci, ſignificat ſexaginta: denique charecter 4. ratione ſui, & loci, ſignificat quatuor, cum proprius eius valor ratione loci non creſcat: adeoque tota ſcriptio 864. ſignificat octingenta ſexaginta quatuor.

Vt quælibet ſcriptio vulgaris Arithmeticæ notis expreſſa legi poſſit, ſufficit intelligere prædictos valores, proprios, atque locales notarum quibus vtitur vulgaris Arithmetica: dummodo in promptu ſint voces quibus tales valores poſſint enuntiari. Verùm quia eiuſmodi valores qui centum aut mille ſuperant, parum vſitati ſunt apud eos, qui Arithmeticam non didicerunt; etiam in promptu non habent voces, quibus tales valores enuntiantur. Vt hic vocum defectus ſuppleatur, & quilibet facilè poſſit legere numeros vulgaris Arithmeticæ notis compendiosè ſcriptos, vtiles eſſe poſſunt ſequentes praxes.

Pra-

Praxis prima, ſiue modus legendi numerum vulgarem integrum, qui ſex, aut paucioribus notis Arithmeticis exprimitur.

EX ijs, quæ paulo ante diximus, de ſignificatione, ac valore characterum, aut notarum vulgaris Arithmeticæ, abundè patet, quomodo legantur numeri tribus tantum, vel paucioribus notis expreſſi; immo huiuſmodi numeros legere vix vlli ignorant, qui aut legere, aut ſcribere didicerunt, cum quibus tantum agimus; itaque vel ex paulo ante traditis, vel aliundè, ſuppoſita notitia requiſita, vt tribus, vel paucioribus notis expreſſi numeri legantur, hic tantum traditur, quomodo legantur numeri, qui exprimuntur, quatuor, quinque, aut ſex, characteribus, aut notis Arithmeticis.

Incipiendo à fine numeri propoſiti, poſt tertiam notam ponatur virgula: deinde notæ virgulam præcedentes legantur, ac ſi nullæ aliæ ſequerentur, atque his vocibus addatur vox mille, vel vox millia, pro vt ſenſus exigit: denique legantur etiam reliquæ tres notæ, ac ſi ipſas nullæ aliæ præcederent, ſic enim totum propoſitum numerum rectè leges. Ex. Gr. numerus A. rectè legitur, dicendo, quatuor millia trecenta viginti ſex, vbi apparet quomodo pro virgula legatur vox millia. Similiter numerus B. rectè legitur, dicendo, triginta quatuor millia trecenta viginti ſex. Pari modo numerus C rectè legitur, dicendo, centum triginta quatuor millia trecenta viginti ſex.

A. 4, 3 2 6
B. 3 4, 3 2 6
C 1 3 4, 3 2 6

Praxis ſecunda, Siue modus legendi numeros vulgares integros pluribus quam ſex notis Arithmeticis expreſſos.

PRimo incipiendo à fine numeri propoſiti, totus numerus propoſitus diuidatur in membra, quæ ſingula ſex notas contineant, atque puncto interpoſito ab inuicem diſtinguantur: membrum tamen quod verſus ſiniſtram primum eſt, non quidem plures, ſed tamen pauciores quam ſex notas continere poterit; deinde ſingulis punctis membra ab inuicem ſeparantibus, ſubſcriban-

tur numeri, indicantes, quot membra ſequantur verſus dexteram poſita; Sic enim habebitur numerus diuiſus in membra, quæ ſingula non plures quam ſex notas Arithmeticas continebunt, adeoque per primam praxim legi poterunt. Vt iuxta primam praxim ſucceſſiue legendo ſingula membra, legitime enuntietur totus numerus: duo diuerſi modi vtiles eſſe poſſunt.

Primus, atque paulo longior modus eſt, ſi incipiendo à ſiniſtra parte, ſingula membra ſucceſſiue legantur, hoc tantum obſeruando, vt vocibus quibus membrum enuntiatur, toties addatur vox millio (in caſu quem ſenſus exigit) quot vnitates indicat numerus ſubſcriptus puncto membrum terminanti; ſic enim legitime enuntiabis totum numerum.

Secundus modus paulo compendioſior, aſſumit ſubſequentes voces, millio, bilio, trilio, quatrilio, quintilio, ſextilio, ſeptilio: aut plures his ſimiles, ſi pluribus opus ſit; harum vocum prima, ſiue millio, ſignificat millies mille, vox bilio, idem ſignificat, ac vox millio bis ſucceſſiue poſita: adeo vt idem ſit, vnus bilio, vel vnus millio millionum. Vox trilio, idem ſignificat ac vox millio ter ſucceſſiue poſita: adeo vt idem ſit, vnus trilio, & vnus millio millionum millionum. Vox quatrilio, idem ſignificat ac vox millio quater ſucceſſiue poſita: adeo vt idem ſit, vnus quatrilio, vel vnus millio millionum millionum millionum. Hinc ſatis manifeſtum eſt, quid ſignificent reliquæ voces hic aſſumptæ: & etiam quomodo his ſimiles aliæ efformari poſſint: ac denique, quæ ex his vocibus correſpondeat cuilibet numero ſubſcripto alicui puncto membrum terminanti; quibus cognitis, vt ſecundo atque paulo compendioſiori modo legatur propoſitus numerus: incipiendo à ſiniſtra parte, ſingula membra ſucceſſiue legenda erunt, hoc tantum obſeruando, vt vocibus quibus membrum enuntiatur, addatur vox correſpondens numero, qui ſubſcriptus eſt puncto membrum terminanti. Sic enim legitime enuntiabitur totus numerus.

Pro exemplo propoſitus ſit numerus A: qui paruus non eſt, immo plures vnitates ſignificat, quam ſint notæ Arithmeticæ, ad quas ſcribendas ſufficerent omnes totius orbis terrarum aquæ, in atramentum conuerſæ.

A·7032658491000375374293570130423.

Numerus A in membra diuiſus, repræſentatur à ſubſequenti ſcriptione: ex qua ſatis apparet, quomodo propoſiti maiores numeri in membra diuidendi ſint, vt commode legantur, iuxta praxim de qua hic agimus.

7·0

7.036258.491000.375374.293570.130423.
V. IV. III. II. I.

Hunc numerum iuxta primum modum ita leges. Septem milliones millionum millionum millionum millionum: triginta duo millia ſexcenti quinquaginta octo milliones millionum millionum millionum: quadringenta nonaginta vnum millia millionum millionum millionum: trecenta ſeptuaginta quinque millia trecenti ſeptuaginta quatuor milliones millionum: ducenta nonaginta tria millia quingenti ſeptuaginta milliones: centum triginta millia quadringenta viginti tria.

Eumdem numerum iuxta ſecundum modum, ita leges, ſeptem quintiliones: triginta duo millia, ſexcenti quinquaginta octo quatriliones: quadringenta nonaginta vnum millia trilionum: trecenta ſeptuaginta quinque millia trecenti ſeptuaginta quatuor biliones: ducenta nonaginta tria millia quingenti ſeptuaginta milliones: centum triginta millia quadringenta viginti tria.

Non video quæ in enuntiandis vulgaribus atque integris numeris ſupereſſe poſſit difficultas ad Arithmeticum ſpectans, cuius officium non eſt exponere leges pertinentes ad Grammaticorum genera, numeros, aut caſus. Si alicui videar, non ſatis exacte obſeruaſſe, has Grammaticorum leges, in enuntiandis propoſitis numeris: ſciat me id feciſſe ſuadente commoditate.

Aliqua notanda pro numeris vulgaribus, aut operationibus Arithmeticis.

Expoſita praxi enuntiandi quoslibet integros numeros vulgares compendioſe expreſſos notis Arithmeticis, quæque ad eiuſmodi notarum intelligentiam magis neceſſaria videbantur, propono hic aliqua magis neceſſaria pro tradendis de operationibus Arithmeticis inſtitutis circa numeros vulgares integros.

I. Quid ſit vulgaris Arithmetica dicitur in opuſculi huius argumento, numeri quos compendiata ſcriptione exhibet, dicuntur numeri vulgares, qui diuiduntur in integros & fractos; numeri vulgares integri dicuntur, qui indicant vnam vel plures vnitates ſimplices: fracti numeri vulgares dicuntur, qui indicant aliquas vnitates quæ ſint partes vnitatis ſimplicis.

II. Vnitas ſimplex dicitur illa quæ ſignificatur per vocem vnum ſimpliciter poſitam, ſed ex aliqua præcedente hypotheſi determinatam

Digitized by Google

natam ad ſignificandam alicuius ſpeciei vnitatem, ſiue indiuiduum: vnitas enim & indiuiduum hic idem ſignificant. Exempli gratia poſita hypotheſi, quod per vocem vnum ſimpliciter poſitam placeat intelligere vnum hominem, vnitas ſimplex erit vnus homo. Similiter poſita hypotheſi, quod per vocem vnum ſimpliciter poſitam placeat intelligere binarium hominum, vnitas ſimplex erit binarius hominum. Pari modo poſita hypotheſi, quod per vocem vnum ſimpliciter poſitam placeat intelligere vnum binarium abſtractum, vnitas ſimplex erit vnus binarius abſtractus; atque ita de ceteris: quoties enim voces vnum, duo, tria, ſimpliciter poſitæ adhibentur, ex circumſtantijs in quibus adhibentur, hoc eſt ex hypotheſi in qua adhibentur, percipitur quid ſubaudiri debeat, ſiue qualia indiuidua, vel quales vnitates ſignificent: atque hoc modo ſignificatæ vnitates dicuntur vulgares ſimplices: vulgares quidem, quia per vulgares numeros indicantur: ſimplices vero quia indicantur per vocem vnum, aut vnitatem ſimpliciter prolatam, aut nota Arithmetica expreſſam.

III. Quando dicitur numerus A, intelligi debet numerus, quem ex vi hypotheſis ſignificat, ſiue repræſentat littera A; idem eſt de alijs alphabeti litteris. Exempli gratia poſita hypotheſi, quod littera A repræſentet numerum 24, numerus A, & numerus 24, idem ſignificant. Similiter ſi agendo de numero exhibeatur numerus 20, aut alius aliquis, cum adſcripta littera A, quod dicitur de numero A, intelligi debet de numero cui littera A adſcripta repræſentatur. Pari modo ſi littera A aſſumatur ad ſignificandum quemlibet numerum indeterminate ſumptum, quod dicitur de numero A, intelligi debet de quouis numero indeterminate ſumpto.

IV. Operationes vulgaris Arithmeticæ vniuerſim ſunt quatuor, nimirum Additio, Subtractio, Multiplicatio & Diuiſio: quæ ſingulæ ſunt operationes Arithmeticæ: atque omnes & ſolæ iſtæ operationes dicuntur operationes Arithmeticæ.

V. Numeri dati pro aliqua operatione Arithmetica, appellantur illi numeri, qui proponuntur pro facienda ea operatione. Ex: gr: ſi pro facienda additione proponantur numeri A & B; dati pro additione numeri erunt A & B: hi numeri dati, aliter vocantur genitores operationis Arithmeticæ, pro qua dantur, ſiue proponuntur.

VI. Numerus A plus numero B, idem ſignificat, ac ſi diceretur numerus A ſimul cum numero B. Exempli gratia quia 6 ſimul cum 2 dat 8, etiam 6 plus 2 dat 8. Numerus A minus numero B, hic idem ſignificat, ac ſi diceretur numerus A ſublato numero B, ſiue illud quod remanet quando ex numero A aufertur numerus B. Ex-

empli

empli gratia quia ex numero 6 auferendo numerum 2, remanet numerus 4: etiam 6 minus 2 dat 4.

VII. Ex duobus genitoribus, ſiue numeris datis alicuius operationis Arithmeticæ, vnus vocatur ſuperior, alter inferior. Datus numerus, ſiue genitor ſuperior, dicitur ille cui alter debet addi, vel ex quo alter debet ſubtrahi, vel qui per alterum debet multiplicari aut diuidi. Inferior genitor, ſiue numerus datus, dicitur ille, qui debet addi, vel ſubtrahi, vel per quem alter debet multiplicari, aut diuidi. Exempli gratia, ſi genitores, ſiue dati numeri ſint, A & B ſuperior erit A & inferior erit B, ſuppoſito quod numero A debeat addi numerus B: vel quod ex numero A debeat ſubtrahi numerus B: vel quod numerus A debeat multiplicari, aut diuidi per numerum B.

VIII. Productum ſiue genitum ex aliqua operatione Arithmetica, dicitur numerus qui oritur ex tali operatione. Huiuſmodi productum diſtinguo in totale & partiale; intelligendo per productum totale, totum numerum qui oritur ex tali operatione; ſimiliter per productum partiale intelligendo, partem, ſiue vnam notam Arithmeticam producti totalis: quoties tamen ſermo eſt de producto, vel genito ex aliqua operatione, & oppoſitum expreſsè non dicitur, agitur de producto totali. Aliter etiam Arithmeticæ operationis productum diſtinguo, nimirum in productum ſimplicis operationis, & productum compoſitæ operationis: primum eſt quod oritur ex ſimplici operatione, ſecundum eſt quod oritur ex compoſita operatione.

IX. Operationes Arithmeticas diſtinguo in ſimplices & compoſitas. Additio, & etiam ſubtractio erit ſimplex, ſi vnus ex duobus genitoribus, ſiue numeris datis pro additione, vel ſubtractione, exprimatur vnica nota Arithmetica; ſi vero vterque genitor exprimatur pluribus notis Arithmeticis, Additio, vel Subtractio, erit compoſita. Multiplicatio erit ſimplex, ſi vterque genitor, ſiue vterque numerus datus pro multiplicatione, exprimatur vnica nota Arithmetica; reliquæ multiplicationes dicuntur compoſitæ. Denique Diuiſio erit ſimplex, ſi ex illa producatur vnica nota Arithmetica: reliquas diuiſiones appello compoſitas; his tamen ſimplicium, compoſitarumque operationum diſtinctionibus non vtor niſi in operationibus inſtitutis circa integros numeros vulgares, in quibus exponendis, à ſimplicibus, atque faciilioribus operationibus, gradum facio ad compoſitas operationes.

CAPVT II.

De Additione numerorum integrorum vulgarium.

ADditio docet plures numeros in vnam ſummam colligere, atque hanc ſummam exhibere; ſiue inuenire vnum numerum qui propoſitis duobus, aut pluribus numeris ſimul ſumptis, æqualis ſit.

Additio de qua hic agitur poteſt eſſe ſimplex vel compoſita: quomodo additio ſimplex abſoluatur, ex ipſa additionis definitione adeo manifeſtum eſt, vt nulla declaratione indigeat: quis enim tam ignarus, vt neſciat, quod 2 plus 3 dent 5: item quod 7 plus 6 dent 13: item quod 15 plus 4 dent 19; vel quod numeri 2 & 3 ſimul ſumpti æquentur numero 5: item quod numeri 7 & 6 ſimul ſumpti æquentur numero 13? Iam verò pauciores quàm decem vnitates eadem facilitate adduntur, minoribus, atque maioribus numeris: atque ea additio vocatur ſimplex, in qua alicui propoſito numero pauciores quam decem vnitates addendæ proponuntur; igitur prætermiſſa vlteriori expoſitione additionis ſimplicis, quæ ex ipſo additionis conceptu manifeſta eſt, neque vllam difficultatem annexam habet: venio ad additionem compoſitam, quæ expoſitione indiget, & declaro quomodo per iteratas additiones ſimplices abſoluatur compoſita additio, quando pro additione dati numeri ſunt vulgares, atque integri; & primo quidem trado praxim, qua huiuſmodi compoſitæ additiones abſoluuntur, quando dati numeri ſunt eiuſdem ſpeciei; deinde ex tradita praxi deduco additionem vulgarium atque integrorum numerorum, qui inter ſe ſpecie differunt; vtrum duo numeri ſint eiuſdem, vel diuerſæ ſpeciei declaratur capite 6. quod caput conſuli poterit ab eo, qui deſiderat magis exactam expoſitionem numerorum eiuſdem, vel diuerſæ ſpeciei.

Praxis prima, ſiue additio numerorum integrorum vulgarium, qui non differunt ſpecie.

PRrimò, mediante additione ſimplici, de qua paulo ante egimus, addēdo ſucceſſiue omnes notas Arithmeticas vltimo loco ſcriptas

Digitized by Google

ptas in numeris datis pro additione, inuenies productum partiale, cuius producti poſtrema nota vltimo loco ſcribenda eſt in producto totali quod quæritur, & à reliquis notis producti partialis indicatæ vnitates (ſi aliquæ notę reliquæ ſint ab vltima diuerſæ) ſeruari debent pro penultimo loco. Secundò, iterum mediante ſimplici additione, ſeruatis pro penultimo loco vnitatibus addendo ſucceſſiue omnes notas in datis numeris ſcriptas penultimo loco, habebitur nouum productum partiale, cuius poſtrema nota penultimo loco ſcribenda eſt in producto totali, atque à reliquis partialis producti notis indicatæ vnitates, ſeruandæ erunt pro antepenultimo loco. Simili plane modo ſucceſſiue operando, circa datorum numerorum notas ſcriptas in locis æqualiter ab vltimo loco diſtantibus, inuenies productum totale quod deſideratur.

Pro exemplo, propoſiti ſint vulgares integri numeri A,B,C quos oporteat addere, atque inuenire productum ex tali additione. Cōmodum eſt ita datos numeros ſcribere, vt hic factum vides: nimirum

9 7 7 2 5 1.	A
2 3 0 9 6 3.	B
8 0 8 4 2.	C
1 2 8 9 0 5 6.	D

vt omnes notæ vltimo loco ſcriptæ deorſum ſibi reſpondeant: atque ſimiliter deorſum ſibi reſpondeant datorum numerorum notæ reliquæ, æqualiter diſtantes ab vltimis notis. Verum ſiue modo iàm expoſito, ſiue aliter ſcripti ſint numeri dati, vt inueniatur productum additionis in hunc modum practice diſcurritur. 2 plus 3 dat 5, & 5 plus 1 dat 6, itaque in producto vltimo loco ſcribo 6, & nihil ſeruo pro penultimo loco. Rurſus quia nihil ſeruatum fuit pro penultimo loco, 4 plus 6 dant 10, & 10 plus 5 dant 15: itaque penultimo loco ſcribo 5, & ſeruo 1. Rurſus quia 1 ſeruaui, 1 plus 8 dat 9, & 9 plus 9 dat 18, item 18 plus 2 dant 20: itaque tertio loco à fine ſcribo 0 & ſeruo 2. Rurſus quia 2 ſeruaui, 2 plus 7 dant 9, quarto loco à fine ſcribo 9 & ſeruo 0. Rurſus quia 0 ſeruaui, 0 plus 8 dant 8, & 8 plus 3 dant 11, item 11 plus 7 dat 18, quinto loco à fine, ſcribo 8, & ſeruo 1. Rurſus quia 1 ſeruaui, & 1 plus 2 dant 3, item 3 plus 9 dant 12, ſexto loco à fine ſcribo 2, & ſeruo 1 pro ſeptimo loco à fine, atque ſeptimo loco à fine ſcribo 1 quia in datis numeris ſeptimo loco à fine nihil inuenitur ſcriptum, adeoque nec addendum vnitati ſeruatæ pro ſeptimo loco à fine: totuſquè numerus D, per iteratas ſimplices additiones collectus, erit productum additionis propoſitæ.

Hæc ſufficere exiſtimo pro additione in qua duo, vel plures numeri vulgares integri, atque eiuſdem ſpeciei, addendi proponuntur: vt ex hac ipſa additione melius appareat praxis vſitata pro ad-

Digitized by Google

ditione, in qua (vt loquuntur practicæ Arithmeticæ ſcriptores) diuerſæ ſpecies addendæ proponuntur: vtile erit reflectere, additionem hic expoſitam, amplecti, ſiue inuoluere duo inter ſe diuerſa, nimirum iteratam additionem ſimplicem, & prætere a reductionem vnius ſpeciei vnitatum ad vnitates alterius ſpeciei. Pro praxi propoſita requiri iteratam ſimplicem additionem ſatis manifeſtum eſt. Vt intelligatur pro eadem additionis praxi requiri reductionem vnitatum vnius ſpeciei ad vnitates alterius ſpeciei, aduertendum, vnitates ſimplices, ſpecie differre ab vnitatibus, quæ ſingulæ ſunt decades vnitatum ſimplicium: & iterum vtramque hanc vnitatum ſpeciem diuerſam, etiam ſpecie differre ab vnitatibus, quæ ſingulæ ſunt centenarij, aut millenarij vnitatum ſimplicium; hinc quando Exempli gratia pro decem vnitatibus ſimplicibus collectis ex notis vltimo loco ſcriptis ſeruatur vnitas, atque illa vnitas additur vnitatibus collectis ex vnitatibus ſcriptis penultimo loco, decem vnitates ſimplices reducuntur ad vnitatem alterius ſpeciei, nimirum ad vnam decadem vnitatum ſimplicium, quæ plane æquiualet decem vnitatibus ſimplicibus, atque adeo vna decas vnitatum ſimplicium non malè ſubſtitui poteſt, pro decẽ vnitatibus: ex quo non tantum conſtat, propoſitam additionis praxim inuoluere reductionem vnitatum vnius ſpeciei ad vnitates alterius ſpeciei; verum etiam quare talis vnitatum reductio legitimè adhibeatur, & in quo fundetur ea pars expoſitæ praxeos; quæ iubet notam aliquam ſeruari. Iam verò pro illis praxibus in quibus vulgaris Arithmeticæ ſcriptores docent addere numeros diuerſæ ſpeciei, ſufficiunt duo illa, quæ hic oſtendimus inueniri, aut conſiderari poſſe in propoſita praxi, quæ agit de additione numerorum eiuſdem ſpeciei; etenim in additionibus in quibus concurrunt numeri diuerſæ ſpeciei nuſquam docent, Exempli gratia, in vnam ſummam colligere tres libros, & quatuor calamos, qui duo numeri ſimul, neque conſtitunt ſeptem calamos, neque ſeptem libros, immo addi, ſiue in vnum numerum colligi non poſſunt, eo ipſo quod reduci non poſſint ad vnitates eiuſdem ſpeciei: ſed tantum docent inuenire numerum magis compendiatum, atque æquiualentem pluribus numeris datis pro additione, vt apparebit ex ſubſequente praxi.

Pra-

Digitized by Google

Praxis ſecunda, Siue additio numerorum integrorum vulgarium, quando aliqui ex datis numeris, indicant diuerſæ ſpeciei vnitates.

PRo hac praxi nihil requiritur, præter additionem numerorum eiuſdem ſpeciei, & reductionem vnitatum vnius ſpeciei, ad vnitates alterius ſpeciei, de quibus ſatis multa notauimus in præcedente praxi: reliquum igitur eſt, vt propoſitam praxim declaremus in exemplis. In quem finem numerus indicans 8 libras cum 10 vncijs addendus ſit numero indicanti 14 libras, cum 9 vncijs; huius additionis productum haberi poteſt duplici modo. Primo. Mediante prima praxi vncias 10 addendo vncijs 9 habebis vncias 19 collectas ex datis numeris; & ſimiliter per eamdem praxim, 8 libras addendo 14 libris, habebis 22 libras collectas ex datis numeris: adeoque ex datis numeris, vniuerſim habebis collectas 22 libras cum 19 vncijs: atque hic numerus libras & vncias indicans, erit productum ex propoſitis numeris, atq; illis ſimul ſumptis æquale, ſed breuius exhibens, quod dati numeri minus compendiate indicant. Vbi obſeruari poteſt, quomodo ad inueniendum additionis productum, nihil adhibitum ſit, præter praxim primam, ſiue additionem numerorum eiuſdem ſpeciei.

libræ	vnciæ
14	9
8	10
22	19

Secundo. Mediante prima praxi, vncias 10 addendo 9 vncijs, habebis 19 vncias: quibus æquiualet vna libra cum 7 vncijs (nimirum ſuppoſito quod 12 vnciæ vnam libram conſtituant) itaque ſcribendo 7 vncias, & ſeruando atque transferendo vnam libram ex vncijs collectam, ad numeros libras ſignificantes, etiam illi numeri erunt colligendi in vnam ſummam, atque ita habebis 23 libras, & numerus indicans 23 libras cum 7 vncijs, indicabit productum propoſitæ additionis. Vbi obſeruari poteſt, inuentionem huius ſecundi producti, exhibentis 23 libras cum 7 vncijs, non diferre ab inuentione producti exhibentis 22 libras cum 19, vncijs, niſi quod pro inuentione primi producti, adhibeatur ſola additio tradita in prima praxi, hoc eſt ſola additio numerorum eiuſdem ſpeciei; pro inuentione ſecundi producti, præter additionem numerorum eiuſdem ſpeciei, adhibetur reductio vnitatum indicantium vncias, ad vnitates indicantes libras.

libræ	vnciæ
14	9
8	10
23	7

 Ex

Ex propoſitis duobus modis inueniendi productum additionis, quando dati numeri non ſunt eiuſdem ſpeciei, vterque vtilis eſt: ſecundus tamen, qui inuoluit reductionem, requirit notitiam pro tali reductione requiſitam, exempli gratia, quot vnciæ conſtituant vnam libram: vel vniuerſaliter, quot vnitates vnius ex ſpeciebus datis, conſtituant vnitatem alterius ſpeciei: quare ſi deſit hæc notitia, primus modus erit adhibendus.

CAPVT III.

De ſubtractione numerorum integrorum vulgarium.

SVbtractio docet minorem numerum ex maiori auferre, atque exhibere reſiduum; ſiue inuenire numerum qui ſit differentia duorum numerorum qui proponuntur; vel inuenire numerum qui minori dato numero addi debet, vt habeatur numerus qui dato maiori numero æqualis ſit.

Subtractio de qua hic agitur, poteſt eſſe ſimplex, vel compoſita: quomodo ſubtractio ſimplex abſoluatur, manifeſtum eſt ex ipſa definitione ſubtractionis, neque vlla declaratione indiget: ſic exempli gratia patet, quod 5 minus 2 det 3: item quod 19 minus 4 det 15; & quia pauciores quam decem vnitates eadem facilitate ſubtrahuntur ex numeris maioribus, atque minoribus; ea ſubtractio quæ ſimplex dicitur, & in qua nunquam plures quam 9 vnitates ex propoſito alio maiori numero auferendæ proponuntur, manifeſta eſt ex ipſo conceptu ſubtractionis: neque vlla declaratione indiget; quomodo per iteratas ſimplices ſubtractiones abſoluatur ſubtractio compoſita, in qua ex propoſito numero maiori, plures quam 9 vnitates ſubtrahendæ proponuntur, docent ſequentes praxes:

Praxis prima, ſiue ſubtractio numerorum integrorum vulgarium, qui non differunt ſpecie.

PRimo mediante ſubtractione ſimplici, ſubtrahendo vltimam notam dati numeri inferioris, ex vltima nota dati numeri ſuperioris (denario auctam ſi opus fuerit) habebitur vltima

ma nota producti quæſiti: eritque pro penultimo loco ſeruanda vnitas, ſi vltima nota dati ſuperioris numeri denario aucta fuerit; vel ſi hæc nota denario aucta non fuerit, nihil ſeruatur. Secundo quod ſeruatum fuit prius additur penultimæ notæ inferioris numeri, ac deinde aufertur ex penultima nota ſuperioris numeri (denario aucta ſi opus fuerit) ſeruando vnitatem, ſi denario aucta fuit nota ſuperior. Tertio ſucceſſiue circa ſingulas notas quæ penultimas præcedunt, fit illud idem quod circa penultimas faciendum præſcribitur: atque ita per iteratas ſimplices ſubtractiones, paulatim in producto colleguntur notæ omnes; quibus exprimitur propoſitæ ſubtractionis productum, ſiue reſiduum quod inueniri debet.

Pro exemplo, propoſitus ſit numerus A, ex quo ſubtrahi debeat minor numerus B, eiuſdem tamen ſpeciei cum numero A. vt inueniam productum, ſiue reſiduum propoſitæ ſubtractionis commodum eſt ita datos numeros ſcribere, vt hic exhibentur: nimirum vt vltima nota dati inferioris numeri reſpondeat vltimæ notę dati numeri ſuperioris: atque eodem modo reliquæ notæ numeri inferioris, reſpondeant notis numeri ſuperioris; verum ſiue hoc modo, ſiue aliter ſcripti ſint dati numeri, vt inueniatur productum ſubtractionis, in hunc modum practicè diſcurritur.

5 4 7 0 3 5.	A
8 2 6 1.	B
5 3 8 7 7 4.	C

5 minus 1 dat 4. itaque 4 ſcribo vltimo loco in producto, & nihil ſeruo (quia numerum 5 denario augere neceſſe non fuit ad faciendam ſimplicem ſubtractionem). Rurſus quia nihil ſeruatum fuit, & 3 minus 6 eſt aliquid impoſſibile, ſumo 13 minus 6 quod dat 7; itaque 7 ſcribo penultimo loco in producto, & ſeruo 1. Rurſus quia 1 ſeruaui, 2 plus 1 faciunt 3, & 0 minus 3 eſt aliquid impoſſibile, ſumo 10 minus 3, quod dat 7: itaq; in producto ſcribo 7 tertio loco à fine, & ſeruo 1. Rurſus quia vnum ſeruaui, 8 plus 1 dat 9, & 7 minus 9 eſt aliquid impoſſibile, ſumo 17 minus 9, quod dat 8: itaque in producto ſcribo 8 quarto loco à fine, & ſeruo 1. Rurſus quia 1 ſeruaui, & nihil inuenio cui addi debeat, 4 minus 1 dat 3: itaque in producto ſcribo 3 quinto loco à fine, & nihil ſeruo. Rurſus quia nihil ſeruaui neque in inferiori numero aliam notam inuenio, 5 minus 0 dat 5, in producto ſcribo 5 ſexto loco à fine: eritque operatio abſoluta, quia nullę ſuperſunt notæ, circa quas continuari poſſit: adeoque notæ hactenus ſcriptæ in producto, exhibebunt numerum D quæſitum, atque exhibentem differentiam numerorum A & B, ſiue reſiduum quod relinquitur quando numerus B ex numero A aufertur.

Hæc

Digitized by Google

Hæc ſufficere exiſtimo pro ſubtractione in qua dati numeri ſunt vulgares integri, atque eiuſdem ſpeciei. Vt ex ſubtractione expoſita, melius innoteſcat praxis vſitata pro ſubtractione in qua proponuntur numeri diuerſæ ſpeciei, vtile erit aduertere, ſubtractionem hic expoſitam, inuoluere duo inter ſe diuerſa (vt præcedenti capite monuimus agendo de additione) nimirū iteratam ſubtractionē ſimplicem, & præterea reductionem vnitatum vnius ſpeciei, ad vnitates alterius ſpeciei. Primum ſatis manifeſtum eſt; pro ſecundo aduertendum, quod quoties ex notis æqualiter ab vltima diſtantibus, inferior ex ſuperiori auferri non poteſt, tunc ſuperiorem notam decem vnitatibus augeri, atque hunc vnitatum denarium, haberi ex vnitate, quæ proximæ præcedenti inferiori notæ addita, auſertur ex reſpondente nota ſuperioris numeri: atque adeo vnitas, quæ decas eſt, reducta ad decem vnitates, decadi ęquiualentes, conſtituit illas decem vnitates, quibus augetur nota ſuperior, ex qua inferior ſubtrahi non poteſt; ipſa verò vnitas quæ decas eſt, aufertur ex præcedenti nota; ſicut enim in additione, decem vnitates qualeſcunque illæ ſint, reducuntur ad vnitatem, quę ſit decas prædictarum vnitatum, ita hic vnitas quæ eſt decas aliquarum vnitatum, reducitur ad decem eiuſmodi vnitates. Ex his ſatis apparet, non tantum propoſitam ſubtractionis praxim inuoluere reductionem vnitatis vnius ſpeciei, ad vnitates alterius ſpeciei; verum etiam, quare talis reductio legitimè adhibeatur, & in quo fundetur ea pars expoſitæ praxeos, quæ iubet denario augeri notam, ex qua inferior nota ſubtrahi non poteſt; atque pro eiuſmodi decem vnitatibus transferri, ſiue ſeruari vnitatem, quæ cum reliquis vnitatibus indicatis à proximè præcedente nota inferioris numeri, auferatur ex correſpondente nota ſuperioris numeri. Pro praxibus, in quibus Arithmeticæ practicę ſcriptores docent ſubtractionem, quando diuerſæ ſpeciei numeri proponuntur, nihil adhibetur, pręter ſubtractionem in prima praxi propoſitam, & reductionem vnitatum vnius ſpeciei, ad vnitates alterius ſpeciei; neque vſquam docent ſubtractionem pro qua hęc duo non ſufficiunt; ſic exempli gratia nuſquam docent 3 libros ex 4 calamis ſubtrahere: ſiue inter tres libros & quatuor calamos differentiam inuenire; etenim inter omnes numeros poſſibiles, nullus inuenitur, qui ſit differentia inter tres libros, & quatuor calamos, ſubtractio autem non docet niſi inuenire numerum qui propoſitorum duorum numerorum differentia ſit.

Pra-

Praxis ſecunda, ſiue ſubtractio numerorum integrorum vulgarium, quando aliqui ex datis numeris indicant diuerſæ ſpeciei vnitates.

PRo hac praxi nihil requiritur præter ſubtractionem numerorum eiuſdem ſpeciei, & reductionem vnitatum vnius ſpeciei, ad vnitates alterius ſpeciei (de quibus ſatis multa in præcedente praxi) vt patebit ex ſubſequentibus exemplis. Ex numero 23 librarum cum 7 vnciis, ſubtrahendus ſit numerus 14 librarum cum 9 vncijs. Vt propoſitam ſubtractionem abſoluam ita practice diſcurro; 9 vncias ex 7 vncijs auferre non poſſum, igitur 7 vncijs addendo vncias conſtuentes vnā libram, hoc eſt 12 vncias, habeo 19 vncias: atque vnciæ 19 minus 9 vncijs dant 10 vncias: igitur in producto ſcribo 10 vncias, & ſeruo vnam libram: deinde vna libra ſeruata plus 4 libris dant 5 libras; verum 3 libræ minus 5 libris, eſt aliquid impoſſibile; quare ſumo 13 libras minus 5 libris, quæ dant 8 libras, quas ſcribo in producto; & ſeruo vnum (nimirum vnam librarum decadem) Rurſus quia vnum ſeruaui & 1 plus 1 dant 2: & 2 minus 2 dant 0 in producto deberem ſcribere 0, ſi proſequenda eſſet operatio, ſed quia illa abſoluta eſt, ob defectum aliarum notarum, circa quas continuari debeat, non ſcribo 0, quia primo loco poſitum nihil ſignificat; atque adeo productum propoſitæ ſubtractionis erit numerus, qui indicatur à notis ſcriptis in producto, nimirum numerus indicans 8 libras cum 10 vncijs.

libræ	vnciæ
23	7
14	9
8	10

Pro ſecundo exemplo, numerus indicans 10 gradus cum 52 minutis primis, & 7 minutis ſecundis; ſubtrahendus ſit ex numero indicante 20 gradus cum 5 minutis ſecundis. Vt in propoſito caſu productum ſubtractionis inueniam, ſic practicè diſcurro: 5 minuta ſecunda minus 7 minutis ſecundis eſt aliquid impoſſibile, quare ſumo 65 minuta ſecunda minus 7 minutis ſecundis, quæ dant 58 minuta ſecunda; igitur in producto ſcribo 58 minuta ſecunda & ſeruo vnum minutum primum, quod reductum ad 60 minuta ſecunda adhibitum fuit. Rurſus 52 minuta prima plus

Gradus	min. 1.	min. 2.
20	0	5
10	52	7
9	7	58

plus vno minuto primo quod ſeruatum fuit, dant 53 minuta prima: & quia nullum minutum primum minus 53 minutis primis eſt aliquid impoſſibile (reducendo vnum gradum ad 60 minuta prima) ſumo 60 minuta prima minus 53 minutis primis, quæ dant 7 minuta prima: itaque in producto ſcribo 7 minuta prima, & ſeruo vnum gradum. Rurſus vnus gradus ſeruatus plus 10 gradibus, dant 11 gradus, & 20 gradus minus 11 gradibus dant 9 gradus: itaque in producto ſcribo 9 gradus: eritque abſoluta ſubtractio propoſita: cuius productum continebit 9 gradus cum 7 minutis primis, & 58 minutis ſecundis.

CAPVT IV.

De multiplicatione numerorum integrorum vulgarium.

VOces multiplicare, & ducere, idem ſignificant: adeo vt idem ſit, numerus A ductus in numerum B, & numerus A multiplicatus per numerum B: vt monuimus capite primo.

Numerum vulgarem integrum A, ducere in vulgarem integrum numerum B, eſt inuenire numerum C, qui oritur ex tot numeris A ſimul ſumptis, ſiue additis: quot vnitates indicantur à numero B. Vbi aduertendum nihil referre pro multiplicatione, an dati numeri A, & B, ſint eiuſdem, vel diuerſæ ſpeciei. Propoſita definitio multiplicationis, conuenit integris numeris vulgaribus; vt habeatur definitio quæ etiam fractos numeros amplectatur: dici poſſet numerum vulgarem A ducere in vulgarem numerum B, eſſe idem, ac inuenire numerum C, cuius numerator oriatur ex tot numeratoribus numeri A ſimul additis, quot vnitates indicantur à numeratore numeri B: denominator vero oriatur ex tot denominatoribus numeri A ſimul additis, quot vnitates indicantur à denominatore numeri B. Quid ſit alicuius numeri numerator, aut denominator, declaratur capite 6. Pro multiplicatione de qua hic agimus, ſufficit definitio multiplicationis primo loco propoſita: pro qua neceſſe non eſt intelligere quid ſint vulgarium numerorum numeratores, aut denominatores.

Propoſita definitione multiplicationis, exhibeo varios modos, ſiue

ſiue praxes, quibus inuenitur numerus productus ex multiplicatione duorum numerorum, qui ſinguli ſint vulgares atque integri; & primo quidem propono aliquam multiplicationis praxim ſatis operoſam, atque prolixam: ſed tamen conſideratione dignam, tum quia deducitur ex ipſa multiplicationis allata definitione, & nihil requirit niſi additionem expoſitam præcedenti capite: tum etiam quia eſt fundamentum reliquarum praxium in quibus compendiatæ multiplicationes proponuntur.

Praxis prima, ſiue prolixior multiplicatio integrorum atque vulgarium numerorum, quæ nihil requirit præter notitiam additionis expoſitæ ſuperiori capite.

PEr ea quæ de additione dicta ſunt præcedenti capite, inueniatur productum ex tot numeris A ſimul additis, quot vnitates indicantur à numero B: atque hoc productum vocetur numerus C; erit numerus C productum ex numero A ducto in numerum B.

Exempli gratia, ſuppoſito quod numerus A ſit 6 & numerus B ſit 3, quia tres numeri 6 ſimul additi dant 18, productum ex numero 6 ducto in numerum 3, erit 18. Similiter ſuppoſito quod numerus A ſit 14, & numerus B ſit 4: quia quatuor numeri 14 ſimul additi producunt 56, etiam productum ex numero 14 ducto in numerum 4 erit 56. Pari modo ſuppoſito quod numerus A ſit 25, & numerus B ſit 12: quia duodecim numeri 25 ſimul additi dant 300, etiam productum ex numero 25 ducto in numerum 12 erit 300. Denique ſi numerus A ſit 25, & numerus B ſit 1, quia productum ex vno numero 25 nulli alteri addito eſt 25, etiam productum ex numero 25 ducto in 1 erit 25

Hæc ſufficient pro prima praxi multiplicationis, quæ ſola additione abſoluitur, & parum vſitata eſt, ob prolixitatem quam requirit, quoties planè parui non ſunt numeri qui proponuntur pro multiplicatione; reliquæ praxes, quæ docent magis vſitatas, atque compendiatas multiplicationes diſtinguendæ ſunt, in eas quæ docent ſimplicem multiplicationem (in qua ſimplici multiplicatione vterque datus numerus exprimitur vnica nota Arithmetica) & in praxes quæ docent compoſitam multiplicationem, in qua ſinguli ex datis numeris non exprimuntur vnica nota Arithmetica. Compoſitę

atque compendiatæ multiplicationes vix aliquid requirunt, præter iteratas multiplicationes ſimplices atque compendiatas; verum hæc ſimplex, atque compendiata multiplicatio, adeo facilis non eſt vt nulla prorſus expoſitione indigeat; pro eius declaratione vſitata eſt tabula, quam Pythagoricam appellant, quia eius inuentor fuit Pythagoras, vt igitur ordinatè exponam multiplicationes compendiatas, à facilioribus paulatim pergendo ad difficiliora, prius trado, quomodo mediante ſola additione conſtituatur tabula pythagorica: deinde doceo mediante hac tabula inuenire productum cuiuſcunque ſimplicis multiplicationis; denique propono, quomodo mediante ſimplici multiplicatione compendiata, inueniatur productum cuiuſcunque propoſitæ multiplicationis, quæ ſimplex non eſt.

Tabulæ Pythagoricæ conſtructio mediante ſola ſimplici additione.

TAbulam Pythagoricam hic repræſentatam habes: conſtructionem eius paucis expono. Primo aſſumatur quadratum aliquod, ſubdiuiſum in octuaginta, & vnum alia parua quadrata, inter ſe æqualia: atque in ſuprema nouem quadratorum ſerie, à ſiniſtra parte verſus dexteram ordine naturali ſibi ſuccedant nouem notæ Arithmeticæ, quæ vnam, vel plures vnitates indicant; in ſingulis quadratis, ſuprema quadrata deorſum ſuccedentibus, ſcribatur productum ex additione duorum numerorum, quorum vnus inuenitur in quadrato proximè ſuperiori, alter vero inuenitur in ſupremo quadrato eiuſdem ſeriei: Exempli gratia in ſerie quadratorũ deorſum excurrente in qua ſupremo loco inuenitur numerus 4, ſecundo loco inuenitur numerus 8, qui producitur ex 4 plus 4, quorum vnus inuenitur in quadrato, quod proximè præcedit illud cui 8 inſcribitur, alter verò inuenitur in ſupremo quadrato eiuſdem ſeriei; quod quadratum ſupremum, idem eſt cum quadrato quod proximè præcedit illud cui.

Tabula Pythagorica

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

lud cui inſcriptus eſt numerus 8. in hac eadem ſerie, tertio loco inuenitur numerus 12, qui producitur ex 8 plus 4 quorum vnus numerus 8 inuenitur in quadrato quod proximè præcedit illud cui 12 inſcribitur, alter numerus 4 inuenitur in ſupremo quadrato eiuſdem ſeriei. Simi iter quarto loco inuenitur numerus 16, qui producitur ex 12 plus 4, quorum vnus numerus 12 inuenitur in quadrato, quod proximè præcedit illud cui inſcriptus eſt numerus 16, alter numerus 4 inuenitur in ſupremo quadrato eiuſdem ſeriei. Pari modo quinto loco inuenitur numerus 20, qui producitur ex 16 plus 4; item ſexto loco inuenitur 24 qui producitur ex 20 plus 4. Item ſeptimo loco inuenitur numerus 28 qui producitur ex 24 plus 4. Item octauo loco inuenitur numerus 32 qui producitur ex 28 plus 4. Item nono loco inuenitur numerus 36 qui producitur ex 32 plus 4. Denique quemadmodum hic in exemplo allato patet, quomodo vnius ſeriei deorſum excurrentis, numeri omnes producantur, ſimplici atque adeo facillima additione: ita etiam produci numeros cuiuſuis alterius ſeriei deorſum excurrentis, facile eſt videre ex appoſita tabula.

Laminarum Arithmeticarum conſtructio.

Expoſitę conſtructioni tabulæ Pythagoricæ, plane affinis eſt, conſtructio laminarum Arithmeticarum: immo ſingulæ laminæ Arithmeticæ, propemodum nihil aliud ſunt, quam ſeries quadratorum deorſum excurrentium in tabula Pythagorica, aut tabula Pythagorica ſecta in partes; ſingulæ enim laminæ Arithmeticæ, à ſingulis quadratorum ſeriebus in tabula Pythagorica deorſum excurrentibus, tantum differunt, quod laminarum quadrata ſingula, quæ ſupremum ſubſequuntur, à diametro diuiſa ſint in duo triangula: quorum infimum, atque verſus dexteram poſitum, contineat poſtremam notam quadrato inſcriptam; alterum triangulum contineat penultimam notam eidem quadrato inſcriptam, ſi præter vltimam aliqua inſcripta ſit quadrato; in hunc modum conſtructam laminam, appellamus laminam Arithmeticam. Vnam huiuſmodi laminam Arithmeticam, exhibet figura cui inſcripta eſt littera B: quam conferendo cum ſerie quadratorum quæ à numero deorſum excurrit in tabula Pythagorica; facilè erit aduertere, verum eſſe, quod hactenus diximus de laminis Arithmeticis. Præter huiuſmodi laminas ex tabula Pythagorica deſumptas, *Fig.* 1.
aliquæ etiam requiruntur, in quarum ſupremo quadrato, vna

cifra, ſiue o contineatur: atque deorſum ſubſequentium quadratorum triangulis inferioribus, eadem cifra, ſiue o contineatur. Talem laminam repræſentat figura C. Denique requiritur laminarum Arithmeticarum index, quem repræſentat figura A. Hic index planè non differt à prima ſerie quadratorum, quæ ab vnitate deorſum
Fig. 1. excurrit in tabula Pythagorica. De numero laminarum nihil hic addo; etenim ex ijs quæ de laminarum vſu dicenda ſunt, facilè quiuis colliget, quis laminarum numerus vtilis eſſe poſſit; neque enim certus aliquis, atque determinatus laminarum numerus neceſſarius eſt; ſed talis diuerſarum laminarum numerus requiritur, qui ſufficiat ad ſolutionem ſubſequentis primi problematis.

Laminarum Arithmeticarum vſus longe præſtantior eſt, vſu tabulæ Pythagoricæ; etenim præter eamdem illam commoditatem, quam Arithmeticæ candidatis affert tabula Pythagorica (quæ expleto tyrocinio abijcitur vt inutilis) talem vſum habent laminæ Arithmeticæ: vt mereantur retineri, atque adhiberi, etiam ab ijs qui in Arithmetica maximè verſati ſunt, ſed tamen nolunt inutiliter, aut tempus terere, aut caput defatigare. Laminarum Arithmeticarum vtilitas curruum equorumue vtilitati ſimilis dici poſſet; ſuo tempore, & loco, equo, aut curru vehi, maximè commodum eſt: ſed tamen huiuſmodi commoditatis neceſſitas, non leuis incommoditas foret; atque commiſeratione dignus haberetur, qui ad ambulandum pedibus ſuis vti non poſſet, tametſi ſuo obſequio promptos haberet equos, aut currus. Pari modo Arithmetico, incomoda, & parum decora foret neceſſitas laminarum Arithmeticarum: quarum commoditatem nihil melius docet, quam vſus, ſi ſuo tempore, & loco adhibeantur: nimirum quando multiplicationum, aut diuiſionum multitudo, aut prolixitas, compendium vel ſubſidium requirit: laminæ enim, omnem propemodum laborem multiplicationibus, aut diuiſionibus proprium, tollunt: & in his operationibus eam tantum moleſtiam relinquunt, quæ additioni, aut ſubtractioni propria eſt; vt patebit ex dicendis de vſu laminarum Arithmeticarum. Vt hunc vſum ſuo loco commodius exponam, proderunt problemata ſequentia.

PRO-

PROBLEMA I.

Propoſiti numeri vulgaris integri, columnam diuiſoriam exhibere in laminis Arithmeticis.

QVid ſit columna diuiſoria, & quomodo conſtrui poſſit: exponitur in praxi quinta ſubſequentis capitis. Vt in laminis Arithmeticis, exhibeatur columna diuiſoria propoſiti cuiuſuis numeri vulgaris integri; laminarum indici, ſucceſſiuè verſus dexteram ita apponendæ ſunt laminæ, vt ſupremæ illarum notæ, repræſentent propoſitum numerum. Exempli gratia ſi propoſitus ſit numerus 39, cuius numeri columna diuiſoria exhibenda ſit in laminis; indici immediatè apponendo laminam cuius ſuprema nota eſt 3: & huic lamini alteram apponendo cuius ſuprema nota eſt 9: habebis in laminis exhibitam columnam diuiſoriam quæſitam: quam repræſentat figura ſecunda. *Fig.* 2.

PROBLEMA II.

Deſcribere, aut legere, numerum propoſitæ indicis notæ correſpondentem; in columna diuiſoria exhibita in laminis Arithmeticis.

VT propoſito problemati ſatisfiat aduertendum duo contiguarum laminarum triangula, eidem indicis notæ correſpondentia ſimul conſtituere rhumbum integrum: ſingula vero triangula eſſe dimidiatos rhumbos: atque in columna diuiſoria à laminis exhibita, ſingulis indicis notis lateraliter reſpondere ſeriem rumborum, quorum primus, & vltimus dimidiatus eſt, reliqui ſunt integri; denique rhumbis contentas notas ad eumdem locum ſpectare, ad quem ſpectant rhumbi. Hoc prænotato, vt deſcribatur columnæ in laminis exhibitæ numerus, reſpondens propoſitæ indi-

indicis notæ: illud vnum obſeruandum eſt, vt incipiendo à fine, atque addendo notas ad eumdem locum ſpectantes, deſcribatur numerus; qui inuenitur in ſerie rhumborum, quæ reſpondet propoſitæ indicis notæ. Exempli gratia, ex columna diuiſoria in laminis exhibita, atque repræſentata in primo problemate, deſcribendus ſit numerus reſpondens indicis notæ 2; hic numerus erit 78. etenim in ſerie rhumborum correſpondentium indicis notæ 2, poſtremus rhumbus continet notam 8: quæ proinde vltimo loco ſcribenda eſt; præterea penultimus rhumbus, continet duas notas 6 & 1; quæ notæ additæ dant notam 7 penultimo loco ſcribendam. Similiter ex eadem columna deſcriptus numerus qui correſpondet indicis notæ 9: erit 351; quia poſtremus rhumbus continet notam 1, quæ proinde vltimo loco ſcribenda eſt; præterea penultimus rhumbus continet duas notas 7 & 8: quæ notæ additæ dant 15: adeoque penultimo loco ſcribenda nota 5, & altera nota 1 ſeruanda pro antepenultimo loco; denique quia antepenultimus rhumbus continet notam 2, illi addendo ſeruatam notam 1, habetur nota 3; antepenultimo loco ſcribenda.

Ex modo deſcribendi numerum, qui propoſitæ indicis notæ reſpondet in columna diuiſoria exhibita in laminis: facilè patet, quomodo legi poſſit eiuſmodi numerus: nimirum mente faciendo, quod præſcripſimus pro deſcriptione: idque facilè redditur, poſt aliquod exercitium in deſcribendis huiuſmodi numeris.

Praxis ſecunda, ſiue ſimplex atque compendiata multiplicatio integrorum atque vulgarium numerorum, mediante tabula Pythagorica.

EX duobus numeris datis pro ſimplici multiplicatione, ſinguli exprimuntur vnica nota Arithmetica: id enim exigit multiplicatio quæ ſimplex dicitur; ex quo etiam patet quod ſinguli ex datis illis numeris inueniri poſſint, tum in ſiniſtra parte tabulæ, tum etiam in ſuprema parte tabulæ; itaque ex datis duobus numeris vnus inueniatur in ſuprema parte tabulæ, alter inueniatur in ſiniſtra parte eiuſdem tabulæ: deinde obſeruetur quadratum commune duabus quadratorum ſeriebus, quarum vna ab inuento in ſuprema parte numero recta deorſum excurrit, altera vero ab inuento in ſiniſtra parte numero dextrorſum excurrit, obſeruato communi quadrato, inſcriptum inuenies productum propoſitæ ſimplicis multiplicationis. Exempli gratia, ſi dati pro multiplicatione numeri ſint 4 & 5;

pro-

productum multiplicationis erit numerus 20: qui in ſcriptus eſt quadrato communi duabus quadratorum ſeriebus, quarum vna à numero 4 poſito in ſuprema parte tabulæ, recta deorſū excurrit: altera à numero 5, poſito in ſiniſtra parte tabulæ dextrorſum excurrit. Simili plane modo inuenies quod 4 ductum in 4 det 16. Item quod 7 ductum in 5 det 35. item quod 8 ductum in 7 det 56. item quod 8 ductum in 9 det 72. atque ita de cæteris: neque eſt poſſibilis vlla multiplicatio ſimplex numerorum integrorum atque vulgarium, cuius productum non exhibeat tabula Pythagorica, adhibita modo hic propoſito.

Vt ex propoſita ſimplici, atque compendiata multiplicatione, gradum faciam, ad reliquas, hoc eſt compoſitas, atque compendiatas multiplicationes: diſtinguo duos diuerſos caſus qui poſſunt occurrere; primus eſt, quando ex datis pro multiplicatione numemeris, vnus quidem pluribus notis Arithmeticis indicatur, alter verò exprimatur vnica nota Arithmetica. Secundus eſt, quando ex datis pro multiplicatione numeris, vterque ſcribitur pluribus notis Arithmeticis. Vtroque caſu multiplicatio eſt compoſita: in primo tamen caſu, vix aliud requiritur quam iterata ſimplex multiplicatio: quemadmodum vero in primo caſu productum inuenitur per iteratam ſimplicem multiplicationem, ſic in ſecundo caſu, productum inuenitur per iteratam multiplicationem primi caſus; de primo caſu agitur in tertia & quarta praxi; quinta praxis, agit de ſecundo caſu.

Praxis tertia, ſiue multiplicatio compendiata duorum numerorum integrorum, atque vulgarium quorum vnus vnica: alter pluribus notis Arithmeticis exprimitur.

QVis ex duobus numeris datis pro multiplicatione vocetur ſuperior, vel inferior, parum refert: quoniam igitur liberum eſt, ex datis duobus numeris quemlibet pro inferiori aſſumere: ille vocetur inferior, qui vnica nota Arithmetica exprimitur, alter vero appelletur ſuperior; quo poſito,

Primo per praxim ſecundam (hoc eſt per ſimplicem multiplicationem) inueniatur productum ex inferiori numero ducto in notam vltimam ſuperioris numeri; atque huius producti vltima nota, vltimo loco ſcribatur in producto quod quæritur, reliquæ notæ ſeruentur pro penultimo loco. Secundo, inueniatur productum ex

infe-

inferiori numero ducto in penultimam notam ſuperioris numeri, atque huic producto addatur, quod pro penultimo loco ſeruatum fuit, & in hunc modum inuenti numeri vltima nota penultimo loco ſcribatur in producto quod quæritur. Denique in hunc modum ſucceſſiue operando circa ſingulas notas ſuperioris numeri, paulatim colliges omnes notas quibus indicatur productum quod quæritur.

Pro exemplo multiplicationis de qua hic agimus propoſiti ſint duo numeri A & B, ita vt numerus A conſtet pluribus notis Arithmeticis, & numerus B vnica nota exprimatur; numerus A ſit 5 3 0 7 2; numerus B ſit 4. Hos datos numeros A & B, ſcribere vt hic repræſentantur commodum eſt, non tamen neceſſarium; infra lineam repræſentatur propoſitæ multiplicationis productum, quod quæritur; vt hoc productum inueniam ita practicè diſcurro: 4 ductum in 2 dat 8, itaque in producto quæſito vltimo loco ſcribo 8 & nihil ſeruo. Rurſus 4 ductum in 7 dat 28., & 28 plus 0 prius ſeruato dat 28, itaque in producto quæſito penultimo loco ſcribo 8, & ſeruo 2. Rurſus 4 ductum in 0 dat 0, & 0 plus 2 prius ſeruato dat 2, itaque in producto quæſito tertio loco à fine ſcribo 2, & nihil ſeruo. Rurſus 4 ductum in 3 dat 12, & 12 plus 0 ſiue nihilo ſeruato dat 12, itaque in producto quæſito quarto loco à fine ſcribo 2, & ſeruo 1. Rurſus 4 ductum in 5 dat 20, & 20 plus 1 prius ſeruato dat 21, itaque in producto quæſito quinto loco à fine ſcribo 1, & ſeruo 2. Denique quia in ſuperiori numero A non inuenitur vlla nota circa quam poſſit continuari operatio; nota Arithmetica 2, ſeruata pro ſexto loco à fine, ſcribitur in producto quæſito, loco illi debito ſiue ſextò à fine; atque ita erit abſoluta multiplicatio propoſita, cuius productum erit numerus 2 1 2 2 8 8.

```
5 3 0 7 2. A
        4. B
------------
2 1 2 2 8 8
```

Praxis quarta, ſiue multiplicatio compendiata duorum numerorum integrorum atque vulgarium: quorum vnus, vnica, alter pluribus notis Arithmeticis exprimitur: mediante columna diuiſoria exhibita in laminis Arithmeticis.

PRimo. Per problema primum propoſitum pag. 21. in laminis Arithmeticis exhibeatur columna diuiſoria numeri qui proponitur multiplicandus. Deinde in indice columnæ diuiſoriæ inueniatur

Digitized by Google

tur nota per quam propoſitus numerus multiplicandus eſt, atque inuentæ notæ correſpondens columnæ numerus deſcribatur vt docetur prob. 2. pag. 21. ſic enim habebitur productum propoſitæ multiplicationis.

Exempli gratia numerus 39 multiplicandus ſit per numerum 8. Columna diuiſoria in laminis exhibita erit illa quæ exhibetur in figura ſecunda. Deinde nota in indice quærenda erit 8: atque huic notæ correſpondens columnæ numerus deſcriptus iuxta problema 2 erit 3 1 2; adeoque verum erit, quod 39 ductum in 8 producat 3 1 2.

Praxis quinta, ſiue multiplicatio compendiata duorum numerorum integrorum, atque vulgarium, quorum vterque pluribus notis Arithmeticis exprimitur.

PRimo per tertiam, vel quartam praxim, inueniatur productum ex poſtrema nota numeri inferioris, ducta in totum numerum ſuperiorem: atque hoc productum ita ſcribatur, vt illi alia producta, decuſſatim, atque ordinatè ſubſcribi poſſint. Similiter inueniatur productnm ex penultima nota numeri inferioris, ducta in totum numerum ſuperiorem: atque hoc productum prius inuento producto decuſſatim, atque ordinatè ſubſcribatur. Pari modo ſucceſſiuè inuenienda ſunt producta ex ſingulis alijs notis inferioris dati numeri, ductis in totum numerum ſuperiorem: atque inuenta producta, decuſſatim, atque ordinatè ſubſcribenda ſunt, prius inuentis productis. Denique omnia producta decuſſatim, atque ordinatè ſcripta ſimul addita, vt docetur capite ſecundo, dabunt productum multiplicationis propoſitæ.

Notandum hic quid intelligendum ſit per decuſſatam, aut ordinatam partialium productorum ſcriptionem, quando dicitur partialia producta ſingula, inuenta per præcedentes praxes, decuſſatim, atque ordinatè ſcribenda eſſe. Singula illa producta partialia erunt decuſſatim ſcripta, ſi ſingulorum productorum partialium poſtrema nota, deorſum, correſpondeat notę inferioris dati numeri, ex qua producitur. Deinde ſingula illa producta partialia erunt ordinatè ſcripta, ſi ſingulis notis producti partialis ſuperiori loco ſcripti, reſpondeat tantum vna nota producti partialis ſcripti inferiori loco; vltimæ tamen notæ ſuperiori loco ſcripti producti partialis, non reſpondet vlla nota producti partialis immediatè ſubſcripti, quando illa producta decuſſatim ſcripta ſunt. In ſubſequenti

quenti exemplo numeri C, D, E, decuſſatim atque ordinatè ſcripti repræſentantur.

Pro exemplo multiplicationis de qua hic agitur, datus numerus A ſit 4 5 6 2: alter datus numerus B ſit 7 5 3. Scriptis prius numeris datis A & B, vt hic repræſentantur, practicè diſcurrendo, vt docuimus in tertia praxi, vel ſine diſcurſu illo practico, vt docetur in quarta praxi, inuenio, 3 ductum in totum numerum A dare numerum 1 3 6 8 6, ſiue partiale productum C. Rurſus eodem modo inuenio, 5 ductum in totum numerum A dare numerum 2 2 8 1 0, ſiue partiale productum D. Similiter inuenio 7 ductum in totum numerum A, dare numerum 3 1 9 3 4, ſiue partiale productum E: quæ ſingula producta partialia hic habes decuſſatim, atque ordinatè ſcripta. Denique producta partialia C, D, E, ſimul addendo; vt docetur capite ſecundo, habetur totale productum propoſitæ multiplicationis, nimirum numerus F, ſiue 3 4 3 5 1 8 6.

4 5 6 2.	A
7 5 3.	B
1 3 6 8 6.	C
2 2 8 1 0.	D
3 1 9 3 4.	E
3 4 3 5 1 8 6.	F

Pro complemento eorum quæ hactenus dicta ſunt de muliplicatione, vtiles erunt ſubſequentes reflexiones.

Reflexio prima. Si aliquot poſtremæ notæ alicuius numeri propoſiti pro multiplicatione ſint cifræ, ſiue 0. iſtæ cifræ omnes negligi poſſunt in multiplicatione: ſiue in dato ſuperiori, ſiue in dato inferiori numero inueniantur; dummodo cifræ in ipſa multiplicatione neglectæ, omnes ſucceſſiuè adſcribantur inuento producto. exempli gratia, ſi 200 duci debeat in 3000 neglectis cifris quas nulla alia nota ſubſequitur, reliquus numerus 2 ductus in reliquum numerum 3 producet 6: huic producto ſucceſſiuè adſcribendo neglectas quinque cifras, habebitur numerus 600000: quare 200 ductum in 3000 producit 600000.

Reflexio ſecunda. Si inferior numerus datus pro multiplicatione contineat cifras alijs notis permixtas: negligi poſſunt iſtæ cifræ, dummodo partialia producta genita ex reliquis notis inferioris dati numeri, ordinatè atque decuſſatim ſcribãtur. Exemplum eius, quod in reflexione dicitur, repræſentatur in appoſita multiplicatione ordinatim ſcripta: in qua 3 0 0 2 ductum in 2 4 6 1 7 producit 7 3 9 0 0 2 3 4.

2 4 6 1 7
3 0 0 2
4 9 2 3 4
7 3 8 5 1
7 3 9 0 0 2 3 4

Re-

Reflexio tertia. Licet multiplicatio abſolui poſſit per iteratam aditionem; tamen, toto vt ita dicam cælo, ab additione differt multiplicatio. Hoc imprimis conſtat ex ipſis definitionibus additionis, atque multiplicationis ſuperius à nobis propoſitis. Dein de impoſſibile eſt, vt productum ex additione vulgarium numerorum, non ſit maius quolibet genitore dato pro multiplicatione; verum productum ex multiplicatione non eſt ſemper maius quolibet genitore dato pro multiplicatione; ſed ſubinde eſt maius, ſubinde æquale, ſubinde minus. Exempli gratia 2 ductum in 3 producit 6: quo caſu productum ex multplicatione eſt maius quolibet genitore dato pro multiplicatione. 1 ductum in 1 producit 1; quo caſu productum ex multiplicatione æquatur cuilibet genitori dato pro multiplicatione. 2 ductum in 1 producit 2; quo caſu productum ex multiplicatione æquatur vni ex genitoribus datis pro multiplicatione. Præterea ex dicendis de multiplicatione numerorum fractorum vulgarium, conſtabit, quod 2 ductum in $\frac{1}{2}$ producat $\frac{2}{2}$ ſiue 1; quo caſu productum ex multiplicatione eſt minus vno genitore dato pro multiplicatione, ſed maius altero genitore. $\frac{1}{2}$ ductum in $\frac{1}{3}$ producit $\frac{1}{6}$: quo caſu productum ex multiplicatione eſt minus quolibet genitore dato pro multiplicatione. Hinc facilè colliges, numerum A, ducere in numerum B, non eſſe idem ac numerum A, vel numerum B aliquoties ſumere; quilibet enim numerus aliquoties ſumptus neceſſario maior eſt numero qui aliquoties ſumitur: quare ſi numerum aliquoties ſumere, eſſet idem ac multiplicare talem numerum; etiam productum ex multiplicatione deberet eſſe maius numero qui multiplicatur.

CAPVT V.

De diuiſione numerorum integrorum vulgarium.

NVmerum C diuidere per numerum B, eſt inuenire numerum A, qui ductus in numerum B producat numerum C. Pro diuiſione nihil refert vtrum dati duo numeri ſint eiuſdem vel diuerſæ ſpeciei.

Propoſita definitione diuiſionis Arithmeticæ, exhibeo varios modos, ſiue praxes diuerſas, quibus abſoluitur diuiſio duorum numerorum vulgarium qui ſinguli integri ſint, atque inuenitur productum ex quibuslibet duobus eiuſmodi numeris. Et primo quidem propono praxim qua vtitur vulgaris Arithmetica, vt inueniat, ſiue exhibeat diuiſionis productum, quando numerus diuidendus minor eſt ipſo diuiſore. In reliquis praxibus, agitur de diuiſione, in qua numerus diuidendus non eſt maior diuiſore. Ex his praxibus, quæ ſecundo, & tertio loco proponuntur, operoſæ ſunt atque prolixæ, ac propterea minus vſitatæ; vtiles tamen non tantum ad profundiorem intelligentiam naturæ ipſius diuiſionis, atque reliquarum praxium: verum etiam pro *ijs* qui non amant compendia; in praxibus quæ tertiam ſubſequuntur, proponuntur diuiſiones compendiatæ, vel ſimplices, vel compoſitæ; tres diuiſiones ſimplices, atque compendiatæ inter ſe diuerſæ, proponuntur in quarta, quinta, & ſexta praxi, in ſingulis modo aliquantulum diuerſo, ſuperatur difficultas compendiatæ diuiſionis, quæ & ſimplici, & compoſitæ diuiſioni compendiatæ communis eſt, ac planæ præcipua, immo propemodum vnica quæ inuenitur in compendiata diuiſione: quandoquidem pro compoſitis, atque compendiatis diuiſionibus, vix aliud requiratur, quam iterata ſimplex, atque compendiata diuiſio; vt patebit ex praxibus quæ ſextam ſubſequuntur, in quibus docetur diuiſio compendiata, atque compoſita.

Praxis prima; ſiue diuiſio integrorum, atque vulgarium numerorum, quando diuiſor eſt maior numero diuidendo.

Ex datis duobus numeris ſuperior, ſiue diuidendus, ſcribatur ſupra lineolam, cui ſubſcriptus ſit diuiſor; hæc ſcripſio exhibebit productum propoſitæ diuiſionis.

Tam hic, quam in ſequentibus, quoties in eadem linea vnus numerus alteri ſubſcriptus inuenitur, ſubintelligi debet lineola duos iſtos numeros ſeparans: etenim paſſim omiſſa eſt, quia commode typis exprimi nō poterat.

Exempli gratia numerus diuidendus ſit 4, diuiſor ſit 10. ſcriptio $\frac{4}{10}$ exhibebit productum diuiſionis propoſitæ, eritque verum quod 4 diuiſum per 10 producat $\frac{4}{10}$ ſimiliter verum erit quod 27 diuiſum per 29 producat $\frac{27}{29}$. De modo legendi huiuſmodi ſcriptiones, fractos numeros repræſentantes, & de fractorum numerorum ſignificatione, agemus capite 6.

No-

Notandum hic eſt, ſcriptionem propoſitam non tantum adhiberi in vulgari Arithmetica, in caſu propoſito, nimirum, vt exhibeatur productum diuiſionis in caſu in quo diuiſor eſt maior numero diuidendo: verum etiam, quoties ex quauis alia diuiſione circa integros ac vulgares numeros inſtituta, remanet aliquod reſiduum diuiſionis; etenim notis Arithmeticis productis ex diuiſione, ſucceſſiue adſcribitur diuiſionis reſiduum, ſed ſupra lineolam cui ſubſcriptus ſit diuiſor. Exempli gratia, ſuppoſito quod numerus diuidendus ſit 23, & diuiſor ſit 4; nota producta ex diuiſione erit 5, diuiſionis reſiduum erit 3, totumque productum erit $5\frac{3}{4}$; eritque verum, quod 23 diuiſum per 4 producat $5\frac{3}{4}$. Similiter 7 diuiſum per 3 producit $2\frac{1}{3}$. Atque vniuerſaliter, quoties ex diuiſione remanet aliquod reſiduum, vt habeatur productum diuiſionis, ſemper diuiſionis reſiduum, ſcriptum ſupra lineola cui diuiſor ſubſcriptus ſit, ſucceſſiuè apponitur notis Arithmeticis productis ex diuiſione.

Praxis ſecunda, ſiue prolixior diuiſio integrorum, atque vulgarium numerorum, quæ nihil requirit præter notitiam additionis expoſitæ ſecundo capite.

Ex datis pro diuiſione numeris, ſuperior, ſiue diuidendus ſit C. Inferior, ſiue diuiſor ſit B; hoc poſito ſucceſſiue ſimul addendo plures, & plures numeros B inueniatur numerus D qui ſit æqualis vel proxime minor numero C; notæ Arithmericæ indicantes quot numeri B fuerint ſimul additi, ad producendum numerum D; erunt notæ productæ ex propoſita diuiſione; diuiſionis reſiduum, erit differentia numerorum C & D; quare ſi notis productis ex diuiſione, ſucceſſiue adſcribatur inuentum diuiſionis reſiduum, vt dicitur in prima praxi, habebis productum propoſitæ diuiſionis. Exempli gratia numerus diuidēdus C ſit 50, diuiſor B ſit 12: hoc poſito, 12 plus 12 danr 24, & iterum 24 plus 12 danr 36, rurſus 36 plus 12 dant 48, cui non poteſt amplius addi 12, quin fiat maior quam 50: adeoque numerus 48 eſt proximè minor dato ſuperiori numero 50. Deinde quia numerus 48 productus eſt ex quatuor numeris 12 ſimul additis, etiam nota 4 eſt illa quæ producitur ex propoſita diuiſione. Denique propoſitæ diuiſionis reſiduum eſt 2, quia inuento numero 48 debet addi 2 vt æquetur numero 50; igitur propoſitæ diuiſionis productum eſt $4\frac{2}{12}$.

Pra-

Digitized by Google

Praxis tertia, ſiue prolixior diuiſio integrorum, atque vulgarium numerorum, quæ nihil requirit præter notitiam ſubtractionis expoſitæ tertio capite.

EX datis pro diuiſione numeris, ſuperior, ſiue diuidendus ſit C; inferior, ſiue diuiſor ſit B; hoc poſito, diuiſor B ſubtrahatur ex numero C, & rurſus ex reſiduo huius ſubtractionis, ſubtrahatur diuiſor B; atque hoc modo ſubtractiones continuentur donec relinquatur reſiduum minus ipſo diuiſore; notæ Arithmeticæ indicantes quoties diuiſor B ſubtractus fuerit, erunt notæ productæ ex propoſita diuiſione; inuentum vltimum ſubtractionis reſiduum ipſo diuiſore minus, erit reſiduum propoſitæ diuiſionis, & habebitur productum propoſitæ diuiſionis, ſi notis productis ex diuiſione adſcribatur reſiduum, vt dicitur in prima praxi.

Exempli gratia numerus diuidendus C ſit 50. diuiſor B ſit 12: hoc poſito, 50 minus 12 dat 38; & iterum 38 minus 12 dat 26. Rurſus 26 minus 12 dat 14. Ruſus 14 minus 12 dat 2, quod reſiduum eſt minus ipſo diuiſore; quandoquidem verò diuiſor ſucceſſiue quater ſubtractus ſit ex numero diuidendo, nota Arithmetica 4, eſt illa, quæ producitur ex propoſita diuiſione: eiuſdemque diuiſionis reſiduum eſt 2; quare propoſitæ diuiſionis productum erit $4\frac{2}{12}$.

Duæ paxes diuiſionis: hic propoſitæ, parum vſitatæ ſunt, propter prolixitatem quam requirunt quoties plane parui non ſunt numeri qui proponuntur pro diuiſione; ſubſequentes diuiſionis praxes docent magis compendiatas, atque vſitatas diuiſiones: pro his (vt in alijs operationibus factum eſt) diſtinguo diuiſionem in ſimplicem, & compoſitam; hoc eſt in diuiſionem producentem vnicam notam Arithmeticam, & diuiſionem producentem plures notas Arithmeticas; compoſitæ diuiſiones compendiatæ, parum admodum requirunt, vltra iteratas ſimplices, atque compendiatas diuiſiones: ſimplex atque compendiata diuiſio ſubinde quidem facilis eſt, ſubinde tamen ſatis moleſta eſt atque difficilis; hinc varias propono praxes quibus abſoluitur ſimplex atque compendiata diuiſio: vt ex pluribus, illa poſſit adhiberi, quæ vel propter facilitatem, vel propter compendium, vel quouis alio ex capite cuilibet magis arridebit. In diuerſis circumſtantijs, ſingulæ aliquam prærogatiuam habent; quæ in quarta diuiſionis praxi proponitur vtitur tabula Pythagorica, atque vſu receptum eſt eam proponere incipientibus diſcere Arithmeticam practicam; parum tamen prodeſt quando diui-

diuiſor pluribus notis exprimitur. Reliquæ duæ, quæ in quinta, & ſexta praxi proponuntur, tales ſunt, vt reuera ignorem quænam alteri debeat præferri, licet enim illa, quæ in quinta praxi proponitur ſubinde aliquem quaſi inutilem laborem requirat, pro conſtructione columnæ diuiſoriæ qua vtitur: ſubinde tamen, ipſius columnæ conſtructio (ſaltem pro diuiſionibus compoſitis ad quas ordinatur hæc ſimplex diuiſio) non contemnendum compendium affert; & propemodum liberat omni periculo, incurrendi in errorem, cui maximè expoſita eſt ſimplex diuiſio quæ in ſexta praxi proponitur, hæc tamen talis eſt, vt eius ignorantia maximè dedeceret Arithmeticum practicum: quippe apud eos, qui vtuntur practica Arithmetica, maximè vſitata eſt: quia non ſemper quidem, ſed tamen ordinariè maius affert compendium: ipſa verò operationum compendia tanti fiunt, vt plerumque longioribus praxibus magis compendiatæ præferantur, licet maiores difficultates annexas habeant.

Praxis quarta, ſiue ſimplex diuiſio numerorum integrorum vulgarium, mediante tabula Pythagorica: ſuppoſito tamen, quod diuiſor conſtet vnica nota Arithmetica.

IN ſuprema parte tabulæ Pythagoricæ inueniatur propoſitus diuiſor: deinde inter numeros inuento diuiſori deorſum correſpondentes, obſeruetur numerus, dato numero ſuperiori æqualis, vel proximè minor, ſi nullus æqualis inueniatur; obſeruato in hunc modum numero, correſpondens nota Arithmetica poſita in ſiniſtra parte tabulæ, erit nota producta ex propoſita diuiſione: atque obſeruatus in tabula numerus ſubtractus ex dato ſuperiori numero dabit reſiduum propoſitæ diuiſionis; denique ſi notæ productæ ex diuiſione, adſcribatur reſiduum diuiſionis (vt dicitur in prima praxi) habebitur productum propoſitæ diuiſionis.

Exempli gratia, ſuppoſito quod numerus diuidendus ſit 56, & diuiſor ſit 7 inuenies diuiſori 7, ſcripto in ſuprema parte tabulæ, deorſum reſpondere numerum 56; & quia huic numero, in ſiniſtra parte tabulæ, reſpondet 8: etiam nota 8, erit illa quæ producitur ex propoſita diuiſione; præterea quia inuentus in tabula numerus 56, ſubtractus à numero diuidendo, qui etiam eſt 56, nullum relinquit reſiduum: productum propoſitæ diuiſionis erit 8: atque 56 diuiſum per 7 dat 8. Similiter ſuppoſito quod numerus diuidendus ſit 59

Digitized by Google

ſit 59, quodque diuiſor ſit 7: inuenies diuiſori 7 ſcripto in ſuprema parte tabulæ, deorſum nuſquam reſpondere numerum diuidendum 59, illo tamen proximè minorem eſſe numerum 56; cui iterum in ſiniſtra parte tabulæ reſpondens nota 8, erit nota producta ex diuiſione: & quia 59 minus 56 dat 3, etiam reſiduum diuiſionis erit 3; ac denique 59 diuiſum per 7 dabit $8\frac{3}{7}$.

Praxis quinta, ſiue diuiſio compendiata, ac ſimplex numerorum integrorum, atque vulgarium, mediante columna diuiſoria.

PRo praxi quam hic tradimus requiritur columna diuiſoria, hanc columnam diuiſoriam in laminis Arithmeticis commodè exhibere, docuimus ſuperiori capite; hic vero independenter à laminis Arithmeticis; columnæ diuiſoriæ conſtructionem prius expono duplici diuerſo modo: primo quidem mediante ſola additione tradita capite ſecundo: deinde mediante multiplicatione tradita capite quarto. Denique expoſita cõſtructione columnæ diuiſoriæ; propono eius vſum, & praxim diuiſionis ſimplicis in qua adhibetur columna diuiſoria.

Columnæ diuiſoriæ conſtructio, mediante ſola additione, hæc eſt: primo, ordine naturali ſucceſſiue, atque deorſum excurrentes ſcribantur nouem notæ Arithmeticæ indicantes vnam, vel plures vnitates, atque hæc notarum ſeries vocetur index columnæ diuiſoriæ. Deinde indicis notæ 1, lateraliter adſcribatur propoſitus diuiſor exempli gratia 39. Item indicis notæ 2, lateraliter adſcribatur productum ex numero proximè ſuperiori qui eſt 39, addito diuiſori qui etiam eſt 39, quod productum eſt 78. Rurſus indicis notæ 3 lateraliter adſcribatur, productum ex numero proximè ſuperiori qui eſt 78 addito diuiſori qui eſt 39, hoc productum eſt 117. Rurſus indicis notæ 4, lateraliter adſcribatur, productum ex numero proximè ſuperiori, qui eſt 117, addito diuiſori qui eſt 39, quod productum eſt 156. Simili planè modo indicis notę 5; lateraliter adſcribitur 195, quia 156 plus 39 dant 165. Item indicis notæ 6, lateraliter adſcribitur 234, quia 195 plus 39 dant 234. Item indicis notæ 7 lateraliter adſcribitur 273, quia 234 plus 39 dant 273. Item indicis notæ 8, lateraliter adſcribitur 312, quia 273 plus 39 dant 312.

1.		3	9.
2.		7	8.
3.	1	1	7.
4.	1	5	6.
5.	1	9	5.
6.	2	3	4.
7.	2	7	3.
8.	3	1	2.
9.	3	5	1.

Deni-

Denique indicis notæ 9. lateraliter adſcribitur 351, quia 312 plus 39 dant 351. Hæc columnæ diuiſoriæ conſtructio, conuenit cum conſtructione tabulæ Pythagoricæ mediante additione: differt tantum, quod pro tabula Pythagorica ſufficiat ſimplex additio, pro columna diuiſoria requiratur aditio compoſita, quoties diuiſor exprimitur pluribus notis Arithmeticis.

Columnæ diuiſoriæ conſtructio mediante multiplicatione, hæc eſt. Primo vt paulò ante dictum eſt, ponatur index columnæ diuiſoriæ. Deinde cuilibet indicis notæ lateraliter adſcribatur productū ex indicis nota ducta in diuiſorem, Exempli gratia, poſito quod diuiſor ſit 39 indicis notæ 1, lateraliter reſpondebit 39: quia 1 ductum in 39 dat 39; indicis notæ 2, lateraliter reſpondebit 78: quia 2 ductum in 39 dat 78: indicis notæ 3, lateraliter reſpondebit 117: quia 3 ductum in 39 dat 117. Indicis notæ 4, lateraliter reſpondebit 156, quia 4 ductum in 39 dat 156; atque ita de cæteris

Diuiſio compendiata ac ſimplex, mediante columna diuiſoria, ita abſoluitur. Primo conſtruitur columna diuiſoria, in qua indicis notæ 1 reſpondet propoſitus diuiſor; vel certè talis columna exhibetur in laminis Arithmeticis iuxta problema 2 capitis 4. Deinde inter columnæ numeros, obſeruatur aliquis numerus, diuidendo numero æqualis, vel certè proximè minor, ſi deſit æqualis: obſeruato columnæ numero correſpondens indicis nota, erit nota producta ex propoſita diuiſione: atque obſeruatus columnæ numerus, ſubtractus ex numero diuidendo, dabit reſiduum propoſitæ diuiſionis: quare ſi notæ productæ ex diuiſione, adſcribarur inuentum diuiſionis reſiduum (vt dicitur in prima praxi) habebitur propoſitæ diuiſionis productum.

Exempli gratia, propoſitus numerus diuidendus ſit 299, diuiſor ſit 39; numero diuidendo proximè minor columnæ numerus erit 273, cui reſpondet indicis nota 7: quare nota producta ex propoſita ſimplici diuiſione erit 7; præterea, quia 299 minus 273 dat 26: propoſitæ diuiſionis reſiduum erit 26 atque adeo numerus 299 diuiſus per numerum 39, dabit productum $7\frac{26}{39}$

Non erit inutile circa propoſitam diuiſionis praxim notare; primo, quod hæc quinta praxis non differat à quarta praxi, niſi quod quarta praxis non adhibeat niſi columnas, vt ita dicam, diuiſorias, repræſentatas in tabula Pythagorica; verum quinta praxis, præter eaſdem columnas diuiſorias repræſentatas in tabula Pythagorica, adhibet quaſcunque alias: & dici poſſe in quinta praxi propoſitam diuiſionem, nihil aliud eſſe, quam diuiſionem in quarta

prax. propoſitam, ſed ampliatam, atque reductam ad maiorem vniuerſalitatem; etenim quartæ praxeos diuiſio, reſtricta eſt ad ſolas diuiſiones, in quibus diuiſor exprimitur vnica nota Arithmetica: quinta praxeos diuiſio, nullo modo reſtricta eſt, ſed amplectitur quaslibet ſimplices vulgarium, atque integrorum numerorum diuiſiones. Secundo notari poteſt, quod cum ſola additione conſtrui poſſit quælibet columna diuiſoria, atque in praxi quæ adhibet columnam diuiſoriam, nulla vnquam multiplicatio inſtituenda ſit vt abſoluatur propoſita ſimplex, atque compendiata diuiſio; etiam quælibet compendiata diuiſio, abſolui poteſt, abſque omni difficultate, quæ non inuenitur in additione, aut ſubtractione; ſiue per ſolam iteratam additionem, aut ſubtractionem, etenim pro columnæ conſtructione ſufficit iterata additio: pro ſimplicis diuiſionis reſiduo inueniendo, ſufficit ſubtractio; notam productam ex ſimplici diuiſione, immediate exhibet columna, igitur pro ſimplici diuiſione quæ mediante columna abſoluitur, ſufficit additio, & ſubtractio, neque requiritur vlla multiplicatio. Denique pro diuiſionibus compoſitis, ſufficit ſimplex diuiſio ſæpius iterata, vt patebit ex diuiſione compendiata, atque compoſita quæ proponitur in ſeptima praxi diuiſionis: igitur pro qualibet diuiſione, quæ mediante columna diuiſoria abſoluitur, ſufficit additio, & ſubtractio, neque requiritur vlla multiplicatio.

Praxis ſexta, ſiue diuiſio compendiata, & ſimplex, numerorum integrorum vulgarium.

IN hac praxi, prudenti conſideratione, propoſiti numeri diuidendi atque diuiſoris; inueniendum eſt, quoties diuiſor contineatur in numero diuidendo; quod ſubinde difficile eſt: etiam iis qui commode verſati ſunt in practica Arithmetica; vt hæc difficultas aliquo modo ſubleuetur (independenter ab iis, quæ in præcedentibus praxibus allata ſunt) prodeſſe poſſunt, quæ hic ſubiicio notanda.

Notandum primo. Impoſſibile eſt, vt diuiſor ſimplicis diuiſionis plus quam nonies contineatur in numero diuidendo, vt patet ex definitione diuiſionis ſimplicis. Deinde nota Arithmetica, indicans quoties totus diuiſor contineatur in toto numero diuidendo, dicitur nota producta ex tali ſimplici diuiſione.

Notandum ſecundo, Si in diuiſore, & numero diuidendo, æquemultæ notæ verſus dexteram poſitæ negligantur: nota indicans,

quo-

quoties reliquus diuiſor contineatur in reliquo numero diuidendo, proximè etiam indicat, quoties contineatur totus diuiſor, in toto numero diuidendo. Exempli gratia, ſuppoſito quod numerus diuidendus ſit 3 8 2 4, quodque diuiſor ſit 8 4 2: vtrobique negligendo poſtremas duas notas, reliquus numerus diuidendus erit 3 8. & reliquus diuiſor erit 8; præterea ſicut reliquus diuiſor 8, continetur quater in reliquo numero diuidendo 3 8: ita proximè totus diuiſor 8 4 2, continetur quater in toto numero diuidendo 3 8 2 4; dixi proximè continetur, licet enim in allato exemplo verum ſit, quod totus diuiſor 8 4 2 contineatur quater in toto numero diuidendo: id tamen falſum foret, ſi manente eodem diuiſore 8 4 2 numerus diuidendus foret 3 3 2 4: quo caſu negligendo vtrobique duas vltimas notas, reliquus diuiſor 8, in reliquo numero diuidendo 3 3 continetur quater: ſed tamen totus diuiſor 8 4 2, non niſi tertio continetur in toto numero diuidendo 3 3 2 4.

Notandum tertio. Aſſumpta nota aliqua Arithmetica, eſt maior quam nota producta ex ſimplici diuiſione: ſi aſſumpta nota ducta in diuiſorem, producat numerum maiorem numero diuidendo. Aſſumpta nota Arithmetica, eſt minor, quam nota producta ex ſimplici diuiſione; ſi aſſumpta nota ducta in diuiſorem ſubtrahatur ex numero diuidendo, atque huius ſubtractionis productum ſit æquale, vel maius diuiſore. Exempli gratia, numerus diuidendus ſit 27 diuiſor ſit 4: his poſitis aſſumpta ſit nota Arithmetica 7: quia 7 ductum in 4 dat 28, qui numerus eſt maior propoſito numero diuidendo 27, legitime infertur, notam 7 eſſe maiorem; quam ſit nota quæ producitur ex numero 27 diuiſo per 4. Rurſus aſſumpta ſit nota Arithmetica 5; quia 5 ductum in 4 dat 20, & inſuper 27 minus 20 dat numerum 7, qui maior eſt diuiſore 4: legitimè infertur, notam 5 eſſe minorem, quam ſit nota quæ producitur ex numero 27 diuiſo per 4.

Vt per praxim de qua hic agimus inueniatur productum ſimplicis diuiſionis. Primo, ex conſideratione numeri diuidendi atque diuiſoris, dirigentibus ijs quæ monuimus notanda eſſe, inuenienda eſt nota Arithmetica producta ex propoſita ſimplici diuiſione: hoc eſt nota indicans quoties diuiſor contineatur in numero diuidendo. Deinde inuenta nota Arithmetica duci debet in diuiſorem, atque huius multiplicationis productum ſubtractum à numero diuidendo dabit reſiduum propoſitæ ſimplicis diuiſionis. Denique, notæ productæ ex diuiſione adſcribendo eiuſdem diuiſionis reſiduum (vt dicitur in prima praxi) habebitur productum quæſitum.

Exempli gratia, propoſitus numerus diuidendus ſit 299; diuiſor

ſit 39; primo inquirendo quoties diuiſor 39 contineatur in numero diuidendo 299 quod difficilius eſt,vel iuxta ſecũdum notandũ,inquirendo quoties 3 contineatur in 29, quod errori obnoxium eſt; inueniri debet, notam 7 eſſe illam quæ producitur ex numero 299 diuiſo per 39. Deinde quia 7 ductum in 39 dat 273: & inſuper 299 minus 273 dat 26: erit numerus 26 reſiduum propoſitæ diuiſionis: atque adeo numerus 299 diuiſus per numerum 39 dabit productum 7 $\frac{26}{39}$.

In propoſito exemplo inſinuamus duos modos inueniendi notam productam ex diuiſione; primus eſt, inquirendo quoties diuiſor 39 contineatur in numero 299;ſecundus modus eſt,inquirendo quoties 3 contineatur in numero 29 primum modum difficiliorem eſſe ſatis patet, quandoquidem non ita clarè appareat, quoties 39 contineatur in 299: quam quoties 3 contineatur in 29. Secundum modum qui facilior eſt, errori obnoxium eſſe patet ex ſecundo notando: quoties tamen hoc ſecundo modo inquirendo notam productam ex diuiſione, aberratur: ipſe error facilè detegitur, ex iis quæ neceſſaria ſunt ad inueniendum diuiſionis reſiduum: vt hoc reſiduum habeatur, neceſſe eſt, & notam ex diuiſione productam ducere in diuiſorem, & inſuper huius multiplicationis productum ſubtrahere ex numero diuidendo: quæ ſubtractio fieri non poterit, vel certè eius productum erit æquale aut maius diuiſore, ſi erratum fuit circa notam productam ex diuiſione: circa quam aliter aberrari non poteſt, quam pro ipſa aſſumendo aliam notam maiorem ſcilicet, vel minorem; iam verò ſi nota maior fuerit aſſumpta, in diuiſorem ducta ſubtrahi non poterit ex numero diuidendo, quia tale productum erit neceſſario maius numero diuidendo; ſi verò minor nota fuerit aſſumpta, neceſſariò inuentum diuiſionis reſiduum erit æquale vel maius ipſo diuiſore: vt conſtat ex tertio notando.

Expoſitis varijs praxibus ſimplicis, atque compendiatæ diuiſionis: venio ad diuiſiones compoſitas atque compendiatas: pro quibus vix aliquid requiritur, præter iteratas diuiſiones ſimplices; etenim quælibet diuiſio compoſita, tot diuerſis ſimplicibus diuiſionibus abſoluitur, quot notæ diuerſæ producuntur ex compoſita diuiſione: ſingulæ enim notæ productæ ex compoſita diuiſione, inueniuntur per ſingulas, atque diuerſas ſimplices diuiſiones, in his ſimplicibus diuiſionibus, diuiſor ſemper idem remanet, ſed numeri diuidendi diuerſi ſunt, nimirum partes, ſiue membra totius numeri, qui per compoſitam diuiſionem diuidendus proponitur; nam per membrum numeri diuidendi, intelligi debet, pars numeri diuidendi, quæ diuiſa per totum diuiſorem, vnicam diuiſionis notam

pro-

Digitized by Google

producit: ex his membris numeri diuidendi, primum dicitur, illud, ex quo per ſimplicem diuiſionem producitur prima nota numeri producti ex diuiſione; ſecundum membrum dicitur illud, ex quo per ſimplicem diuiſionem producitur ſecunda nota; tertium membrum dicitur, illud, ex quo per ſimplicem diuiſionem producitur tertia nota; atque ita de cæteris. Quemadmodum verò ſimplex diuiſio non niſi vnicam notam producit, ita totus numerus diuidendus ſimplici diuiſione, vnicum membrum conſtituit: hinc pro ſimplici diuiſione, neceſſe non fuit agere de membris numeri diuidendi: pro compoſitis diuiſionibus neceſſe eſt diſtinguere illa membra,& ſcire modum, quo membra illa inueniuntur; atque hoc vnum eſt quod pro compoſitis diuiſionibus compendiatis requiritur, vltra ea quæ de ſimplicibus atque compendiatis diuiſionibus dicta ſunt. De inuentione membrorum numeri diuidendi agunt proximè ſubſequentes duæ reflexiones, quæ neceſſariæ quidem ſunt, ſed nullis difficultatibus implicatæ,& tam faciles vt pro ſingulis ſimplex reflexio videatur ſufficere.

Reflexio prima. Vt habeatur primum membrū numeri diuidendi: ex numero qui diuidendus proponitur, incipiendo à dextera parte verſus ſiniſtram, accipiuntur tot notæ Arithmeticæ, quot requiruntur ad conſtituendum numerum æqualem, vel proximè maiorem diuiſore, ſi æqualis haberi non poſſit. Exempli gratia ſuppoſito quod numerus diuidendus ſit 3 4 6 2 1 primum membrum erit 34: ſi diuiſor ſit 34, vel 30, vel 18, vel 4, vel quiuis alius numerus maior quidem numero 3, ſed non maior numero 34: ſic enim ſemper verum erit quod numerus 34, vel ſit æqualis, vel proximè maior diuiſore: adeoque primum membrum conſtituat; quod verum non eſſet, ſi diuiſor eſſet 3: quia huic diuiſori æquatur prima nota numeri diuidendi, idem etiam verum non eſſet, ſi diuiſor eſſet 35, vel alius maior numerus: quia hoc caſu numerus 34 non eſſet æqualis, aut proximè maior diuiſore. Si in propoſito exemplo diuiſor eſſet 35, primum membrum eſſet 346: idemque verum eſſet, ſuppoſito quod pro diuiſore daretur quiuis numerus maior quā 34, ſed minor quam 346. Denique primum membrum eſſet 3, ſi pro diuiſore daretur numerus 3, vel 2, vel 1.

Reflexio ſecunda. Vt habeatur numeri diuidendi membrum aliquod, diuerſum à primò membro: reſiduo ſimplicis diuiſionis, inſtitutæ circa membrum proximè præcedens, ſucceſſiue adſcribatur vna illa nota numeri diuidendi, quæ proximè ſequitur præcedentis membris vltimam notam ſumptam ex numero diuidendo:

do: etenim cuiuſuis mẽbri vltima nota ſemper ſumitur ex numero diuidendo. Exempli gratia numerus diuidendus ſit 6 4 7 7 diuiſor ſit 4: quare iuxta primam reflexionem primum membrum erit 6; iam verò ſi circa primum membrum inſtitutæ diuiſionis reſiduum ſit 2, ſecundum membrum erit 24: quod habetur, reſiduo 2, ſucceſſiue adſcribendo notam 4, quæ in numero diuidendo proximè ſequitur notam 6, quæ primi membri vltima eſt. Rurſus, ſi circa ſecundum membrum 24, inſtitutæ ſimplicis diuiſionis reſiduum ſit nihil, ſiue o: tertium membrum erit 7, quod habetur reſiduo, ſiue o, ſucceſſiue adſcribendo notam 7, quæ in numero diuidendo proximè ſequitur notam 4. quæ in ſecundo membro eſt vltima; eſtquè planè idem ſiue ſcribatur o 7, ſiue ſcribatur 7. Rurſus, ſi circa tertium membrum inſtitutæ ſimplicis diuiſionis reſiduum ſit 3, quartum membrum erit 37: quod habetur, reſiduo 3, ſucceſſiue adſcribendo notam 7, quæ in numero diuidendo proximè ſequitur aliam notam 7, quæ in tertio membro vltima eſt.

Praxis ſeptima, ſiue diuiſio compoſita atque compendiata numerorum integrorum vulgarium.

Qualibet compoſita atque compendiata diuiſio numerorum integrorum vulgarium, abſoluitur, alternis inueniendo, & diuiſionis membrum, vt docetur in duabus reflexionibus præcedẽtibus & circa inuentum membrum inſtituendo ſimplicem diuiſionem; etenim membri inuentio neceſſaria eſt vt ſimplex diuiſio inſtitui poſſit & ex ſingulis ſimplicibus diuiſionibus, ſingulæ notæ Arithmeticæ producuntur, quæ ſucceſſiuę ſcriptæ, cum appoſito vltimæ ſimplicis diuiſionis reſiduo (ſcripto vt docetur in prima praxi) exhibent productum compoſitæ diuiſionis.

Praxim paucis expoſitã, declaro varijs exẽplis; inter quæ ſatis notabilis diuerſitas inuenitur: ſed non aliunde cauſata, quam ex modo diuerſo, quo inſtitui poſſunt diuiſiones ſimplices atque compendiatæ, quæ neceſſariæ ſunt pro compendiata atque compoſita diuiſione.

Primũ exemplũ ſeptimæ praxis, in quo mediante columna diuiſoria inuenitur productum ex numero 6897, diuiſo per numerum 39. Primo ex diuiſore 39 cõſtruo columnã diuiſoriam, vt docetur in praxi quinta, quam columnam diuiſoriam hic repreſentatam habes: vel certè columnam illam exhibeo in laminis Arithmeticis. Deinde ita practicè diſcurro. Primum membrum eſt 68: hoc mem-

membro proximæ minor columnæ numerus eſt 39, cui in indice reſpondet 1: igitur in quotiente ſcribo 1, ipſi vero membro 68, ſubſcribo inuentum columnæ numerum 39, qui ſubtractus ex numero 68, relinquit 29: cui ſucceſſiue adſcribo notam 9, numeri diuidendi, atque ita habeo nouum membrum 299: hoc membro proxime minor columnæ numerus eſt 273, cui in indice reſpondet 7, igitur 7 ſcribo in quotiente, & inuentum columnæ numerum 273, ſubſcribo adhibito membro 299: facta ſubtractione remanet numerus 26, cui ſucceſſiue adſcribo notam 7 numeri diuidendi, atque ita habeo nouum membrum 267; hoc membro proximè minor columnæ numerus eſt 234, cui in indice reſpondet nota 6, quam ſcribo in quotiente: & inuentum columnæ numerum 234 ſubſcribo adhibito membro 267; facta ſubtractione remanet 33; cui ſucceſſiue adſcribere non poſſum aliam notam numeri diuidendi adeoque diuiſio eſt abſoluta, & notæ productæ ex diuiſione erunt 176: vltimæ ſimplicis diuiſionis, atque adeo totius compoſitæ diuiſionis, reſiduum erit 33: quare productum ex propoſita diuiſione erit $176\frac{33}{39}$: eritque verum, quod 6897 diuiſum per 39 producat $176\frac{33}{39}$.

1.	29	6897	($176\frac{33}{39}$
2.	74	39	
3.	117	———	
4.	156	299	
5.	195	273	
6.	234	———	
7.	273	267	
8.	312	234	
9.	351	———	
		33	

Secundum exemplum ſeptimæ praxis, in quo mediante columna diuiſoria productum inuenitur, paulo magis compendiata ſcriptione.

Numerus diuidendus ſit 6897 diuiſor ſit 39: quibus poſitis, primo conſtruo columnam diuiſoriam, vt in præcedenti exemplo. Deinde ita diſcurrendo operor: primum membrum eſt 68, hoc membro proxime minor columnæ numerus ex 39, cui indicis nota 1 reſpondet: itaque in quotiente ſcribo 1, & inuentum columnæ numerum 39 ſubtrahendo ex propoſito membro 68, habeo reſiduum 29: quod ſubſcribo membro propoſito: ſcriptum reſiduum 29 cum nota 9 numeri diuidendi conſtituit nouum membrum 299, quo mẽbro proxime minor columnæ numerus eſt 273, cui reſpondet indicis

cis

cis nota 7. itaque in quotiente ſcribo 7, & inuentum numerum 273, ſubtrahendo ex propoſito membro 299, habeo reſiduum 26, quod ſubſcribo membro adhibito; reſiduum 26, cum nota 7 numeri diuidendi, conſtituit nouum membrum 267; quo membro proximè minor columnæ numerus eſt 234, cui reſpondet indicis nota 6: itaque in quotiente ſcribo 6, & inuentum columnæ numerum 234 ſubtrahendo ex propoſito membro 267, habeo reſidum 33, quod ſubſcribo adhibito mẽbro; & quia nulla ſupereſt nota, cum qua reſiduum nouum membrum conſtituere poſſit, abſoluta eſt operatio, & productum erit $176\frac{33}{39}$.

1.	39	6897	($176\frac{33}{39}$
2.	78	29	
3.	117	26	
4.	156	33	
5.	195		
6.	234		
7.	273		
8.	312		
9.	351		

Diuiſio quæ mediante columna diuiſoria abſoluitur eſſet præferenda alijs omnibus mihi cognitis, niſi annexam haberet moleſtiam quam ſecum affert columnæ conſtructio; quæ tamen moleſtia magna non eſt, & aliqua ex parte euitari non poteſt: quandoquidem aliquæ ex multiplicationibus vtilibus pro columnæ conſtructione, neceſſario recurrant in ea diuiſione; in qua non adhibetur columna: immo fieri poteſt, vt multiplicationum pro diuiſione requiſitarum multitudo, maior ſit in ea praxi quæ columnam non adhibet, quam in altera in qua adhibetur columna; etenim quando columna adhibetur, non niſi octo multiplicationes vtiles eſſe poſſunt, pro quibus etiam totidem additiones ſufficiunt, quæ multiplicationibus longè faciliores ſunt: verum quando non adhibetur columna, tot requiruntur multiplicationes, quot notæ ſcribendæ ſunt in quotiente, quæ poſſunt eſſe longe plures quam octo; his adde quod columna diuiſoria expeditè exhibeatur in laminis Arithmeticis: quodque columnam adhibendo, ceſſet omnis difficultas, inueniendi quoties diuiſor contineatur in membro propoſito: quæ difficultas; præ cæteris omnibus moleſtam reddit diuiſionem, in qua columna non adhibetur: & ſubinde operantem non parum defatigat, vel etiam inducit in errorem, niſi maximè verſatus ſit in Arithmeticis operationibus. Verum nihil melius, quam ipſa praxis, docet, vtrum, vel quando, ex diuerſis diuiſionis praxibus, vna alteri præ-

præferenda ſit; & quia pro diuerſis caſibus, atque diuerſis perſonis; diuerſæ praxes magis proſunt, addo hic alteram, quæ à priori non differt, niſi quod non adhibeat columnam diuiſoriam.

Tertium exemplum ſeptimæ praxis, in quo adhibetur diuiſio ſimplex propoſita in ſexta praxi.

Numerus diuidendus ſit 6 8 9 7, diuiſor ſit 39; vt hanc diuiſionem abſoluam, ita practicè diſcurro. Primum membrum eſt 68, in

```
6 8 9 7        (176 33/39
3 9
―――――         39
2 9 9
2 7 3
―――――
  2 6 7
  2 3 4
  ―――――
    3 3
```

quo diuiſor 39 tantum ſemel continetur, quare in quotiente ſcribo 1: & quia 1 ductum in diuiſorem 39 dat 39: numerum 39 ſubſcribo membro 68: facta ſubtractione relinquitur numerus 29, cui ſucceſſiue adſcribo notam 9 numeri diuidendi, atque ita habeo nouum membrum 299: in hoc membro diuiſor 39 ſepties continetur; quare notam 7 ſcribo in quotiente, & quia 7 ductum in diuiſorem 39 dat 273, hunc numerum ſubſcribo membro 299: facta ſubtractione relinquitur numerus 26, cui ſucceſſiuè adſcribo notam 7 numeri diuidendi, atque ita habeo nouum membrum 267: in hoc membro diuiſor 39. continetur ſexies, quare notam 6 ſcribo in quotiente: & quia 6 ductum in diuiſorem 39 dat 234, hunc numerum ſubſcribo membro 267: facta ſubtractione relinquitur numerus 33, cui ſucceſſiuè adſcribere non poſſum aliam notam numeri diuidendi, quia omnes eius notæ adhibitæ ſunt, atque adeo abſoluta eſt diuiſio: atque ex diuiſione productæ notæ Arithmeticæ erunt 176: diuiſionis reſiduum erit 33: adeoque propoſitæ diuiſionis productum erit $176\frac{33}{39}$.

Quartum exemplum ſeptimæ praxis, quod à tertio non differt, niſi penes ſcriptionem paulò magis compendiatam.

Numerus diuidendus ſit iterum 6 8 9 7 & diuiſore ſit 39; his poſitis, primum membrum eſt 68, in quo diuiſor ſemel continetur: itaque in quotiente ſcribo 1: & quia 1 ductum in diuiſorem 39 dat 39, atque inſuper 39 ſublatum ex membro 68 relinquit 29, hunc numerum 29 ſubſcribo membro propoſito; eritque nouum membrum 299, in quo diuiſor 39, continetur ſepties: quare in quotiente ſcribo 7, & quia 7 ductum in diuiſorem 39 dat 273, atque hic numerus ſublatus ex propoſito membro 299 relinquit 26: hunc nu-

Digitized by Google

merum 26 ſubſcribo membro adhibito, & nouum membrum erit 267 in quo diuiſor 39 continetur ſexies, quare in quotiente ſcribo notam 6: & quia 6 ductum in diuiſorem 39 dat 234, atque hic numerus ſubtractus ex membro propoſito 267, relinquit 33: hunc numerum 33 ſubſcribo membro adhibito: quo facto nouum membrum haberi vlterius non poteſt adeoque diuiſio eſt abſoluta, atque ex diuiſione productæ notæ Arithmeticæ erunt 176, & diuiſionis reſiduum erit 33: quare productum ex propoſita diuiſione erit $176\frac{33}{39}$.

6 8 9 7 ($176\frac{33}{39}$
39
2 9
2 6
3 3

Hactenus dictis de diuiſione, vtile exiſtimaui addere paucas reflexiones quæ ſubſequuntur.

Reflexio prima. Si aliquot poſtremæ notæ alicuius propoſiti diuiſoris, ſint cifræ, ſiue 0; negligi poterunt: dummodo etiam negligantur totidem poſtremę notæ numeri qui diuidendus proponitur, ſed tamen non negligantur in reſiduo diuiſionis. Exempli gratia numerus 632 diuidendus ſit per numerum 200, vtrobique negligendo duas poſtremas notas, reliquum ſuperiorem numerum 6 diuidendo per reliquum inferiorem numerum 2, nota producta ex diuiſione erit 3, reſiduum verò erit 32, atque productum ex diuiſione erit $2\frac{32}{200}$.

Reflexio ſecunda. Apud non paucos expoſitores Arithmeticæ practicæ, magis vſitata inuenitur aliqua diuiſionis praxis, in qua membri adhibiti notæ delentur: quam praxes hactenus à nobis propoſitę; prædictam tamen praxim putaui planè negligendam: quia ſi fortè inter operandum irrepat error aliquis, qui deprehendatur, vel ex eo quod productum ex multiplicatione maius ſit membro propoſito, vel quod reſiduum ſubtractionis maius ſit diuiſore: difficile eſt poſt deletas notas, errorem corrigere: quod in propoſitis à nobis praxibus difficultatem non habet.

Reflexio tertia. Quemadmodum multiplicatio maximè differt ab additione, vt monuimus in reflexione tertia capitis præcedentis: ita etiam diuiſio maximè differt à ſubtractione, tametſi per iteratas ſubtractiones inueniri poſſit productum diuiſionis. Impoſſibile eſt, vt productum ex ſubtractione numerorum vulgarium, non ſit minus ſuperiori genitore ſubtractionis: cuius partem exhibet productum ſubtractionis. Productum diuiſionis non ſemper eſt minus numero qui diuiditur; ſed ſubinde eſt minus, ſubinde æquale, ſubinde maius. Exempli gratia. 6 diuiſum per 2 producit 3; quo caſu productum ex diuiſione eſt minus numero qui diuiditur, 2 diuiſum

per

per 1 producit 2, quo caſu productum eſt æquale numero qui diuiditur. Præterea ex dicendis de diuiſione numerorum fractorum vulgarium, conſtabit, quod 2 diuiſum per $\frac{1}{4}$ producat 8; quo caſu productum eſt maius numero qui diuiditur. Hinc facilè colligitur, numerum A diuidere per numerum B, non eſſe idem, ac inuenire aliquam partem numeri A: etenim quælibet pars numeri A, neceſſariò eſt minor numero A; quare ſi numerum A diuidere per numerum B, eſſet idem ac inuenire aliquam partem numeri A: etiam productum ex diuiſione deberet eſſe minus numero qui diuiditur.

Appendix.

De operationum Arithmeticarum examine.

Operationum Arithmeticarum, atque hactenus propoſitarum: varia examina proponunt ſcriptores Arithmeticæ practicæ; illa tamen omnia quæ ab ipſis operationibus diuerſa ſunt, negligo, vt parum vtilia, atque errori obnoxia.

Legitimum additionis examen habetur ex ſubtractione: & viciſſim ex additione legitime infertur an in ſubtractione erratum ſit: etenim qualeſcunq; ſint numeri A & B, ſi numerus A, additus numero B, producat numerum C: etiam numerus B ſubtractus ex numero C; produci numerũ A, & etiã numerus A, ſubtractus ex numero C, producit numerum B. Exempli gratia, quia numerus 12 additus numero 14, producit numerum 26: etiam numerus 12 ſubtractus ex numero 26, producit numerum 14: & numerus 14, ſubtractus ex numero 26, producit numerum 12. Præterea qualeſcunque ſint numeri B & C, eo ipſo quod numerus B, ſubtractus ex numero C, producat numerum A; etiam numerus A, additus numero B, producit numerum C. Exempli gratia, quia numerus 12, ſublatus ex numero 26, producit numerum 14; etiam numerus 14, additus numero 12, producit numerum 26.

Pari modo legitimum multiplicationis examen, habetur à diuiſione, & viciſſim diuiſionis examen, ſubminiſtrat multiplicatio. Etenim qualeſcunque ſint numeri A & B, ſi numerus A ductus in numerum B, producit numerum C, etiam numerus C, diuiſus per numerum B, producit numerum A; & inſuper numerus C, diuiſus per numerum A, producit numerum B. Exempli gratia, quia numerus 7, ductus in numerum 4, producit numerum 28; etiam numerus 28, diuiſus per numerum 4, producit numerum 7;

Digitized by Google

& inſuper numerus 28, diuiſus per numerum 7, producit numerum 4. Rurſus qualeſcunque ſint numeri B & C, eo ipſo quod numerus C, diuiſus per numerum B, producit numerum A: etiam numerus A ductus in numerum B, producit numerum C. Exempli gratia, quia numerus 28 diuiſus per numerum 4, producit numerum 7: etiam numerus 7 ductus in numerum 4, producit numerum 28.

Dubium eſſe poſſet circa examen diuiſionis, quando productum conſtat ex numero integro, & fracto, vt accidere poteſt in diuiſione integrorum numerorum. Exempli gratia productum ex numero 25, diuiſo per numerum 7, producit 3 $\frac{4}{7}$, qui eſt numerus compoſitus ex integro, & fracto, & hactenus non egimus niſi de multiplicatione integrorum numerorum. Vt hoc vel ſimili caſu diuiſio examinari poſſit mediante multiplicatione, notare ſufficit, quod ſi integer numerus productus ex diuiſione, ducatur in diuiſorem, atque huic producto addatur numerus ſcriptus ſupra lineolam, habebitur numerus circa quem eſt inſtituta diuiſio. Exempli gratia, quia numerus 25; diuiſus per numerum 7 producit numerum 3 $\frac{4}{7}$: etiam numerus 3 ductus in numerum 7, auctus numero 4, producit numerum 25: nam numerus 3, ductus in numerum 7, dat numerum 21: cui addendo numerum 4, ſcriptum ſupra lineolam, habetur numerus 25.

CAPVT VI.

Proponuntur aliqua, pro operationibus Arithmeticis inſtituendis circa numeros vulgares fractos.

Expoſitis operationibus Arithmeticis, quæ inſtituuntur circa integros numeros vulgares: venio ad alteram partem Arithmeticæ vulgaris, quæ docet eaſdem operationes inſtituere circa numeros, qui dicuntur fracti; in quem finem, imprimis nobis exponendum eſt, quomodo à prioribus diſcrepent poſteriores. Numerus dicitur qui numerat, ſiue indicat vnitates, vnam ſcilicet, vel plures: etenim à nobis non minùs appellatur numerus, quod vnicam vnitatem indicat: quam quod indicat plures vnitates. Præterea vox vnitas, ita intelligenda eſt, vt ſignificet idem, quod ſignificat vox vnum, ſiue indiuiduum. Iam verò vnitas conſiderari poteſt vt genus eſt, ſiue illud præcisè quod dicitur vnum, hoc eſt indiui-

diui-

Digitized by Google

diuiduum conſideratum præciſè vt indiuiduum eſt: atque hæc vnitas, appellatur vnitas generica, ſiue indiuiduum genericum. Vnitas generica reſtricta, dicitur vnitas ſpecifica: etenim vnitas generica non ſubdiuiditur in diuerſa vnitatum genera, ſed tantum diuiditur in diuerſas ſpecies vnitatum: atque generica vnitas, eſt aliquid idem in ſingulis vnitatibus ſpecificis; ſicut animal, eſt aliquid idem, in ſingulis animalium ſpeciebus; hinc vnitas generica eſt eadem in binario, ternario, quaternario, vnitate totali, vnitate partiali, licet ſingulæ illæ vnitates ſpecie differant inter ſe; ſingulæ enim ſunt vnitates genericæ diuerſimodè reſtrictæ: ipſa verò vnitas generica reſtricta, dicitur vnitas ſpecifica: atque vnitas generica pluries eodem modo reſtricta conſtituit plures eiuſdem ſpeciei vnitates: ipſa vnitas generica pluries, ſed diuerſimodè reſtricta, conſtituit plures diuerſæ ſpeciei vnitates. Exempli gratia, vnitas hominum, ſiue vnus homo: eſt vnitas ſpecie diuerſa, ab vnitate Leonis, ſiue ab vno Leone; ex quo fit, quod vnus homo plus vno Leone, neque faciat duos homines, neque duos Leones. Similiter, vnitas hominum alborum, ſiue vnus homo albus: ſpecie differt ab vnitate hominum nigrorum, ſiue ab vno homine nigro; ex quo fit, quod vnus homo albus plus vno homine nigro, neque faciat duos homines albos, neque duos homines nigros. Rurſus, vnitas diuiſa per quatuor, ſpecie differt ab vnitate diuiſa per tria; ex quo fit, quod vnitas diuiſa per quatuor plus vnitate diuiſa per tria, neque conſtituat duas vnitates diuiſas per quatuor, neque duas vnitates diuiſas per tria. Denique vniuerſaliter vnitas generica diuerſimodè reſtricta, atque contracta ad vnitates plus quam numero inter ſe differentes, conſtituit vnitates ſpecificas diuerſæ ſpeciei. Ex quo ſatis patet, quid ſint vnitates eiuſdem, vel diuerſæ ſpeciei; quodque duæ vnitates erunt eiuſdem ſpeciei, ſi non differant quo ad reſtrictionem, ſed ſolo numero ab inuicem diſcrepent; & quod duæ vnitates erunt diuerſæ ſpeciei, ſi differant quo ad reſtrictionem, atque magis quam numero ab inuicem diſcrepent. Differentiæ reſtringentes vnitatem genericam, atque illam contrahentes ad ſpecificas vnitates vulgares: vel ſunt reſtrictiones dependentes à diuiſione, vel non dependentes à diuiſione. Priores, compendiata ſcriptione indicat vulgaris Arithmetica, in qua, poſteriores, vel productiori ſcriptione indicantur, vel habentur ex hypotheſi: à qua, exempli gratia, dependet quod vnitas ſimplex, vnius, vel alterius ſpeciei vnitates repræſentet: neque aliunde quam ex hypotheſi poteſt cognoſci, cuius ſpeciei vnitatem ſignificet vnitas ſimplex; hæc enim quantum eſt ex ſe, planè indifferens eſt, ad ſignificandam cuiuslibet ſpeciei vnitatem. Reſtrictio depen-

dependens à diuiſione, compendiate indicatur per genitores talis diuiſionis; ſic quando dicitur vnitas diuiſa per quatuor; exprimitur numerus habens reſtrictionem dependentem à diuiſione, in qua ſuperior genitor eſt vnum, inferior genitor eſt quatuor. Similiter quando dicitur, vnitas diuiſa per tria; exprimitur numerus habens reſtrictionem dependentem à diuiſione, in qua ſuperior genitor eſt vnum, inferior genitor eſt tria. Pari modo quando dicitur, quatuor diuiſum per duodecim: exprimitur numerus habens reſtrictionem dependentem à diuiſione, cuius ſuperior genitor eſt quatuor, inferior genitor eſt duodecim. Iam verò vulgaris numerus fractus dici poteſt numerus vulgaris habens reſtrictionem dependentem à diuiſione. Vulgaris fracti numeri numerator, dicitur, ſuperior genitor illius diuiſionis à qua numerus fractus reſtrictionem habet. Vulgaris fracti numeri denominator, appellatur, inferior genitor illius diuiſionis à qua numerus fractus reſtrictionem habet. Ex his conſtat quid ſint vulgares fracti numeri, & quid intelligatur per numeratorem, aut denominatorem vulgaris fracti numeri. Vt vulgaris Arithmetica fractum numerum repræſentet compendiata ſcriptione: interpoſita lineola numeratori ſubſcribit denominatorem. Exempli gratia, numeri A, B, C, D, ſinguli compendiata ſcriptione exhibent fractum numerum vulgarem; numerus A legitur vna quarta pars: vel vnum diuiſum per quatuor: vel vna quaternarij vnitas; tribus iſtis diuerſis modis legendi fractum numerum, nihil diuerſum, ſed idem planè ſignificatur; primus magis vſitatus eſt in vulgari Arithmetica; ſecundus vſitatior eſt in noſtra logiſtica; quodque primus à ſecundo non differat quo ad ſignificationem, etiam apud eos, qui tradunt vulgarem Arithmeticam: ſatis patet, ex prima diuiſionis praxi propoſita cap. 5. quæ apud vulgaris Arithmeticæ expoſitores maximè vſitata eſt, & ſubſiſtere non poſſet, ſi duo priores modi legendi fractum numerum non ſignificarent idem. De tertio modo legendi fractum vulgarem numerum paulo poſt recurrent aliqua. Numerus B, legitur, vna tertia pars: vel vnum diuiſum per tria: vel vna ternarij vnitas. Numerus C, legitur, quatuor duodecimæ partes: vel quatuor diuiſum per duodecim: vel quatuor duodenarij vnitates. Numerus E, legitur, quatuor primæ partes: vel quatuor diuiſum per vnum; vel quatuor integræ vnitates. Ex his ſatis patet quomodo legi poſſint quiuis alij numeri vulgares fracti. Circa modum legendi numerum fractum E, aduertendum eſt, quod pars prima vnitatis ita debeat intelligi, vt idem ſignificet, ac integra vnitas,

A $\frac{1}{4}$

B $\frac{1}{3}$

C $\frac{4}{12}$

E $\frac{4}{1}$

F 4

ex quo

ex quo fit, quod quatuor partes primæ vnitatis, non ſint aliquid diuerſum, à quatuor integris vnitatibus: & ſimiliter, quatuor diuiſum per vnum, non differat ab integro numero quatuor: ex quo vlteriùs ſequitur, nullum numerum habentem pro denominatore vnitatem vulgarem, ſignificare aliquid diuerſum, ab eo, quod ſignificatur per ſolum numeratorem; adeo vt numeri E, & F, diuerſa ſcriptione idem ſignificent: idemque planè ſignificetur, dicendo quatuor primæ partes, vel quatuor diuiſum per vnum, vel quatuor integræ vnitates, vel quatuor; immo hinc fit, quod integri numeri vulgares omnes cenſeantur pro denominatore habere vnitatem vulgarem; quem tamen denominatorem, vel exprimere, vel negligere, liberum eſt: quandoquidem per hoc non varietur numeri ſignificatio: & niſi in hac parte mecum conuenirent ſcriptores vulgaris Arithmeticæ, ſtatuere non poſſent, inter ſe ſpecie conuenire numeros vulgares, qui conueniunt quo ad denominatorem: illos verò ſpecie differre, qui differunt quo ad denominatorem; etenim numeros E, & F, hoc eſt quatuor primæ partes, & quatuor, etiam iuxta ipſos, ſunt numeri eiuſdem ſpeciei: & tamen non conuenirent quo ad denominatorem, ſi integer numerus F, ſiue quatuor, non intelligatur pro denominatore habere vnitatem ſimplicem, quæ eſt denominator numeri E. Si quæras, quare in vulgaribus numeris numeratorum inæqualitas non cau et diuerſitatem ſpecificam, & tamen denominatorum inæqualitas cauſet diuerſitatem ſpecificam, inter duos vulgares numeros: atque exempli gratia vnum diuiſum per quatuor, & vnum diuiſum per tria, ſint numeri diuerſæ ſpeciei: & tamen vnum diuiſum per quatuor; & tria diuiſum per quatuor, ſint numeri eiuſdem ſpeciei: licet priores duo quo ad denominatores non magis differant, quam poſteriores differant quo ad numeratores. Reſpondeo vnum diuiſum per quatuor, ſignificare vnam quaternarii vnitatem, vel vnam quartam partem: & vnum diuiſum per tria, ſignificare vnam ternarij vnitatem, ſiue vnam tertiam partem: quandoquidem igitur quaternarij, & ternarii vnitates, ſint vnitates diuerſimodè reſtrictæ, atque inter ſe plus quam numero differentes: ex iis quæ paulò ante dicta ſunt de numeris ſpecie differentibus, manifeſtum eſt, prædictos duos numeros inter ſe ſpecie differre. Verum vnum diuiſum per quatuor, ſignificat vnam quaternarij vnitatem, vel vnam quartam partem; atque tria diuiſum per quatuor ſignificat tres quaternarij vnitates, ſiue tres quartas partes: ex quo patet duos iſtos numeros ſignificare vnitates eodem modo reſtrictas, atque inter ſe ſolo numero diuerſas: & conſequenter duos illos numeros non differre ſpecie. Ex hac reſponſione videtur ſatis

maui-

manifeſtum, quare in numeris vulgaribus ſola inæqualitas numeratorum non cauſet diuerſitatem ſpecificam, & tamen ſola inæqualitas denominatorum cauſet diuerſitatem ſpecificam; dixi ſola inæqualitas numeratorum: etenim ſi duorum vulgarium numerorum numeratores, non tantum inæquales ſint, ſed amplius inter ſe differant: etiam numeri ſpecie differēt, licet habeant eoſdem denominatores. Exempli gratia vnitas ternarij diuiſa per quatuor, ſpecie differt, ab vnitate binarij diuiſa per quatuor: vt ſatis patet ex paulò antè dictis de numeris ſpecie differentibus: & tamen duo iſti numeri eundem denominatorem habent. Idem verum erit de vna libra diuiſa per quatuor vncias, & de vna vncia diuiſa per quatuor vncias; quis tamen negate poteſt, eiuſmodi numeros vulgares eſſe, vel à vulgari Arithmetica conſiderari. Hinc colliges, quod quando vulgaris Arithmeticæ expoſitores ſtatuunt, ſpecie conuenire numeros vulgares, qui conueniunt quo ad denominatorem: atque ſpecie differre numeros vulgares, qui differunt quo ad denominatorem: id intelligendum eſſe; de numeris vulgaribus expreſſis compendiata ſcriptione apud ipſos vſitata, atque inſuper adhibita in eadem hypotheſi: ſiue de numeris compendiate repræſentatis per ſolas vulgares vnitates ſimplices, atque ſuppoſito quod vnitas ſimplex ſemper idem ſignificet. Denique vt intelligatur, ſingulos modos legendi fractos numeros paulò ante propoſitos idem ſignificare, ſufficit intelligere numeros, repræſentatos productiori ſcriptione, quorum numerorum notitia, ſupponitur ab ijs qui vulgarem practicam Arithmeticam tradunt, & vix, aut ne vix quidem declaratur, ab illis, qui tradunt Arithmeticæ vulgaris practicæ, ſpeculatiua fundamenta; qua de re plura inuenies in poſtrema parte huius opuſculi.

Numerus fractus, & fractio, idem ſignificant: fractionis termini dicuntur, numerator, & denominator fractionis; hinc fractio, ſiue fractus numerus, minoribus terminis conſtare dicitur, quo fractio habet minorem numeratorem, & denominatorem,

Duæ factiones dicuntur æquales inter ſe, quæ æquales numeros ſignificant. Exempli Gratia fractiones A & B, ſunt fractiones æquales: quia ſignificant numeros æquales: vt ſatis patet ex ijs, quæ paulò ante diximus de ſignificatione fractionum.

A $\frac{4}{8}$

B $\frac{1}{2}$

Numerus vulgaris erit ſimplex, ſi vnicum habeat denominatorem; erit compoſitus, ſi duos, aut plures denominatores habeat. Exempli gratia numeri 4, item 120, item $\frac{1}{8}$, item $\frac{10}{2}$, ſinguli ſimplices ſunt; verum numerus $12\frac{3}{4}$ eſt compoſitus.

Duo numeri vulgares erunt eiuſdem ſpeciei, ſi non differant quo ad de-

ad denominatorem, & inſuper, ex vi hypotheſis, vnitates ſimplices à numeris indicatæ, non differant. Duo numeri vulgares erunt diuerſæ ſpeciei: ſi differant quo ad denominatorem, vel vnitates ſimplices à numeris indicatæ, ex vi hypotheſis, differant inter ſe.

Menſura numeri A, dicitur quilibet numerus integer B, qui ſemel, vel ſæpius ſumptus; poteſt æquari numero A. Exempli gratia numeri 24, menſura eſt numerus 6: quia numerus 6 quater ſumptus, æquatur numero 24: ſimiliter numeri 24, menſura eſt 8: quia numerus 8 ter ſumptus æquatur numero 24. Pari modo numeri 24. mẽſuræ ſunt numeri 12, 8, 6, 3, 1, 24; etenim numero 24, ęquatur numerus 12 bis ſumptus itẽ numerus 6, quater ſumptus, item numerus 3, octies ſumptus; item numerus 1 vigeſies quater ſumptus; item numerus 24, ſemel ſumptus. Verum numeri 24. menſura non eſt numerus 5: quia quinquies ſumptus eſt maior quam 24: minus quam quinquies ſumptus eſt minor quam 24. Similiter numeri 24, menſura non eſt numerus 7: qui quater ſumptus eſt maior quam numerus 24; minus quam quater ſumptus eſt minor quam numerus 24.

Menſura duobus numeris A & C communis, eſt quiuis numerus, qui tam numeri A quam numeri C menſura eſt. Exempli gratia numerorum 24 & 20, communis menſura eſt numerus 4: quia ſexies ſumptus æquatur numero 24: & etiam quinquies ſumptus æquatur numero 20.

Duorum numerorum maxima communis menſura, dicitur, numerus, quo non datur maior, qui ſit communis menſura, Exempli gratia numerorum 24, & 16, maxima communis menſura eſt numerus 8: quia numerus 8 eſt menſura communis numerorum 24, & 16: & non datur numerus maior, qui ſit communis menſura: licet dentur alij numeri minores, qui ſinguli ſint communis menſura numerorum 24 & 16: tales enim ſunt 4, 2, 1. Similiter numerorum 24 & 19, maxima communis menſura eſt numerus 1: etenim numerus 1, eſt menſura communis numerorum 24 & 19:, et non datur alius: numerus maior qui ſit communis menſura vtriuſque illius numeri.

Problemata vtilia pro operationibus Arithmeticis, quæ inſtituuntur circa fractos numeros vulgares.

Singula problemata quæ hic proponuntur, vſitata ſunt apud expoſitores vulgaris Arithmeticæ practicæ: licet enim ſingula non ſint planè neceſſaria pro operationibus inſtituendis circa fractos numeros

 meros

meros vulgares: tamen maximè vtilia ſunt, pro vulgari Arithmetica practica.

Problema I.

Inuenire maximam communem menſuram, propoſitorum duorum numerorum A & B, qui ſinguli ſint numeri vulgaris integri.

Maiorem numerum A, diuidendo per minorem B, inueniatur huius diuiſionis reſiduum C. Rurſus præcedentis diuiſionis diuiſorem B, diuidendo per reſiduum C inueniatur nouum reſiduum D. Rurſus præcedentis diuiſionis: diuiſorem C, diuidendo per reſiduum D, inueniatur nouum reſiduum E; atque hoc ordine continuentur diuiſiones, donec pro reſiduo inueniatur o, ſiue nihil; vltimæ huius diuiſionis diuiſor erit maxima communis menſura quæſita. Exempli gratia, propoſiti ſint numeri 20 & 12, quorum maxima communis menſura inuenienda ſit. Primo, 20 diuidendo per 12, habetur reſiduum 8. Rurſus 12 diuidendo per 8; habetur reſiduum 4. Rurſus, 8 diuidendo per 4, habetur reſiduum o; itaque numerorum 20 & 12, maxima communis menſura eſt 4. Similiter propoſiti ſint numeri 32 & 16, quorum maxima communis menſura inuenienda ſit; 32 diuidendo per 16, habetur pro reſiduo o; itaque numerorum 32 & 16, maxima communis menſura eſt 16.

Problema II.

Propoſitum fractum numerum vulgarem reducere ad minimos terminos.

Primo per primũ problema, inueniatur maxima cõmunis mẽſura conueniens numeratori, & denominatori propoſitæ fractionis. Deinde propoſitę fractionis numerator, diuiſus per inuentã maximã menſurã communem, producet nouum numeratorem, & etiam propoſitæ fractionis denominator, diuiſus per inuentã maximam menſurã communem, producet nouum denominatorem. Deniq; nouus numerator, cum nouo denominatore, conſtituet fractionem quæſitam,

Digitized by Google

tam. Exempli gratia, propoſita fractio ſit $\frac{12}{20}$, numeratori 12, & denominatori 20 conueniens maxima communis menſura, eſt 4: deinde 12 diuiſum per 4 producit nouum numeratorem 3; & 20 diuiſum per 4 producit nouum denominatorem 5: adeoque inuenta fractio erit $\frac{3}{5}$: quæ fractio æquiualet propoſitæ fractioni $\frac{12}{20}$: neque poſſibilis eſt vlla fractio quæ æquiualeat propoſitæ fractioni, & conſtet minoribus terminis quam inuenta fractio.

Problema III.

Propoſitos duos fractos numeros vulgares reducere ad communem denominatorem.

PRimo, numerator primæ fractionis propoſitæ, ductus in denominatorem ſecundæ fractionis propoſitæ, dabit primum numeratorem nouum; deinde, ſecundæ fractionis propoſitæ numerator, ductus in denominatorem primæ fractionis propoſitæ, dabit ſecundum numeratorem nouum. Tertio primæ fractionis propoſitæ denominator, ductus in denominatorem ſecundæ fractionis propoſitæ, dabit nouum denominatorem communem. Denique primus numerator nouus, cum inuento communi denominatore, conſtituet nouam fractionem, æquiualentem primæ fractioni propoſitæ; & ſecundus numerator nouus, cum inuento communi denominatore, conſtituet nouam fractionem æquiualentem ſecundæ fractioni propoſitæ: atque adeo habebuntur duæ nouæ fractiones, habentes communem denominatorem, atque æquiualentes propoſitis duabus fractionibus. Exempli gratia propoſita prima fractio ſit $\frac{2}{3}$, ſecunda fractio propoſita ſit $\frac{4}{5}$. Quoniam 2 ductum in 5, dat 10: primus numerator nouus erit 10. Et quia 4 ductum in 3, dat 12: ſecundus numerator nouus erit 12. Præterea cum 3 ductum in 5, det 15; communis denominator erit 15. Denique prima noua fractio erit $\frac{10}{15}$; ſecunda noua fractio erit $\frac{12}{15}$; atque nouæ duæ fractiones exhibebunt propoſitas duas fractiones, reductas ad communem denominatorem.

Problema IV.

Propoſitum fractum numerum vulgarem, reducere ad alium fractum numerum, habentem datum denominatorem, in caſu in quo id fieri poteſt.

PRopoſitæ fractionis numerator, ductus in datum denominatorem, producet aliquem numerum, qui diuiſus per denominatorem propoſitæ fractionis, dabit nouum numeratorem: nouus numerator cum dato denominatore, conſtituet quæſitam fractionem. Exempli gratia, propoſita fractio ſit $\frac{4}{6}$: datus denominator ſit 3. Quoniam, 4 ductum in 3, dat 12: & inſuper 12 diuiſum per 6, dat 2: nouus numerator erit 2: & noua fractio erit $\frac{2}{3}$; quæ habet datum denominatorem 3, & etiam æquiualet propoſitæ fractioni,

Si fieri non poſſit quod præſcribitur pro ſolutione problematis, caſus propoſitus cenſetur impoſſibilis. Exempli Gratia, propoſita fractio ſit $\frac{4}{6}$: datus denominator ſit 5; hoc caſu, 4 ductum in 5 dat 20: ſed 20 diuiſum per 6, non dat integrum numerum: adeoque fieri non poteſt quod præſcribitur in ſolutione problematis, quare caſus propoſitus cenſetur impoſſibilis, & propoſita fractio $\frac{4}{6}$, non poteſt reduci ad aliam fractionem, quæ habeat denominatorem 5.

CAPVT VII.

De operationibus Arithmeticis, quæ inſtituuntur circa fractos numeros vulgares.

SVppoſita intelligentia eorum quæ præcedenti capite dicta ſunt de numeris vulgaribus fractis: & notitia operationum Arithmeticarum, quæ inſtituuntur circa integros vulgares numeros; breuiter propono, quomodo Arithmeticæ operationes abſoluantur, quando ex datis pro operatione numeris, aliquis fractus ſit, atque vulgaris; operationum ſingularum definitiones non

repe-

Digitized by Google

repeto, quandoquidem illæ à nobis propoſitæ ſint in præcedentibus capitibus. Præterea vnico capite complector operationes omnes, quæ circa vulgares fractos numeros inſtituuntur: faciles enim ſunt, neque in ipſis ſupereſt ſpecialis difficultas, præſuppoſita notitia eorum quæ hactenus tradidimus. Obſeruandum hic eſt, quod nuſquam expreſſe agamus de operationibus vulgaris Arithmeticæ, in caſu, in quo aliquis ex datis numeris eſt compoſitus, ex integro & fracto, aut diuerſis fractis numeris: quandoquidem tali caſu, compoſitus numerus prius reduci poſſit ad alium æquiualentem non compoſitum: atque ad hoc abunde ſufficiant pauca ſuperioris capitis problemata.

De Additione numerorum fractorum vulgarium.

VT inueniatur productum, quod oritur ex Additione duorum, aut plurium numerorum vulgarium, quorum aliquis ſit fractus numerus. Primo ſi ſinguli numeri dati non habeant communem denominatorem, per problema 3. capitis 6. reducantur ad alios numeros, habentes communem denominatorem. Quo facto, numeratores ſimul additi dabunt nouum numeratorem qui cum communi denominatore, conſtituet fractum numerum productum ex propoſita additione.

Exempli Gratia, ſi fractus numerus $\frac{4}{7}$, addendus ſit alteri fracto numero $\frac{3}{5}$: hi numeri, per problema 3. capitis 6. reducti ad alios, habentes communem denominatorem, erunt $\frac{20}{35}$ & $\frac{21}{35}$: numeratores 20 atque 21 ſimul additi, producunt 41: quare numerus productus, ex propoſita additione erit $\frac{41}{35}$: adeoque verum erit quod $\frac{4}{7}$ plus $\frac{3}{5}$ producant $\frac{41}{35}$; Similiter ſi integer numerus 4, addendus ſit fracto numero $\frac{3}{5}$: hi numeri per problema 3 capitis 6 reducti ad alios, habentes communem denominatorē erūt, $\frac{20}{5}$ & $\frac{3}{5}$: numeratores 20 & 3 ſimul additi, producunt 23: quare numerus productus ex propoſita additione erit $\frac{23}{5}$; atque adeo verum erit, quod 4 plus $\frac{3}{5}$, producat $\frac{23}{5}$.

Non erit inutile hic reflectere, quod pro additione numerorum integrorum vulgarium, præcisè requiratur, atque ſufficiat, additio numeratorum manente eodem denominatore; quod verum eſt, quia omnes numeri vulgares integri, eumdem habent denominatorem. Similiter, quoties fracti numeri habent eumdem, ſiue communem denominatorem: pro illorum additione, præcisè requiritur, & ſufficit, additio numeratorum, manente eodem denominatore. Si verò

Digitized by Google

verò fracti numeri habeant diuerſum denominatorem, tunc priùs per problema 3. capitis 6. reducendi ſunt ad alios numeros, prioribus æquiualentes, qui habeant eumdem, ſiue communem denominatorem; hæc reductio ad communem denomiratorem neceſſaria eſt, vt haberi poſſit ſimplex numerus, æquiualens datis duobus numeris: ſimplex enim numerus non niſi vnius ſpeciei vnitates indicat, & per vnius ſpeciei vnitates, Exempli Gratia (in moneta Romana, in qua vnum ſcutum, æquiualet 10 Iulijs) per Iuliorum vnitates, exprimi non poteſt numerus, qui indicet aggregatum ex quatuor ſcutis & 5 iulijs: niſi prius 4 ſcuta reducantur ad iulios: quandoquidem 4 ſcuta plus 5 iulijs, non conſtituant ſummam æquiualentem 9 iulijs; quia tamen 4 ſcuta, æquiualent 40 iulijs: adeoque 4 ſcuta reducta ad iulios conſtituunt 40 iulios: etiam 4 ſcuta plus 5 iulijs, producunt 45 iulios: eritque verum, quod aggregatum ex 4 ſcutis & 5 iulijs, æquetur, ſiue æquiualeat, 45 iulijs: & ſimplex numerus 45 iuliorum, indicabit aliquid æquiualens aggregato ex 4 ſcutis & 5 iulijs.

De Subtractione numerorum fractorum vulgarium.

VT inueniatur productum quod oritur ex Subtractione, in qua minor numerus, aufertur ex maiori numero, quando vterque vulgaris eſt, atque vnus ex illis duobus numeris eſt fractus. Primo, ſi ſinguli dati numeri non habeant communem denominatorem, prius per problema 3. capitis 6. reducantur ad alios numeros, habentes communem denominatorem. Quo facto, numerator noui inferioris numeri, ſubtractus ex numeratore noui ſuperioris numeri, dabit nouum numeratorem: qui cum communi denominatore conſtituet productum propoſitæ ſubtractionis.

Exempli Gratia, numerus $\frac{4}{7}$ ſubtrahendus ſit ex numero $\frac{3}{5}$: hos numeros reducendo ad alios, qui communem denominatorem habeant: pro dato ſuperiori numero $\frac{4}{7}$, habebitur nouus ſuperior numerus $\frac{21}{35}$: & pro dato inferiori numero $\frac{3}{5}$, habebitur nouus inferior numerus $\frac{10}{35}$. Deinde noui atque inferioris numeri, numerator 20, ſubtractus, ex noui atque ſuperioris numeri numeratore 21, producit 1; quare numerus productus ex propoſita ſubtractione, erit $\frac{1}{35}$: adeoq. e verum erit, quod $\frac{4}{7}$ minus $\frac{3}{5}$, producant $\frac{1}{35}$. Similiter, ſi ex integro numero 4, ſubtrahi debeat fractus numerus $\frac{3}{5}$; hos numeros reducendo ad alios, qui communem denominatorem habeant: pro dato ſuperiori numero 4, habebitur nouus ſuperior numerus $\frac{20}{5}$: & pro dato inferiori numero $\frac{3}{5}$, habebitur idem numerus

infe-

inferior, nimirum numerus $\frac{3}{5}$. Deinde noui, atque inferioris numeri, numerator 3: ſubtractus ex noui, atque ſuperioris numeri numeratore 20: producit 17; quare, numerus productus ex propoſita ſubtractione, erit $\frac{17}{5}$.

Quemadmodum paulo ante circa additionem, ita hic circa ſubtractionem vtile erit reflectere: quod pro ſubtractione numerorum integrorum vulgarium, præciſè requiratur, atque ſufficiat ſubtractio numeratorum, manente eodem, ſiue communi denominatore, qui in omnibus integris numeris eſt vnitas; & ſimiliter pro ſubtractione numerorum fractorum vulgarium, præciſè requiritur, & ſufficit, ſubtractio numeratorum, manente communi denominatore: quoties dati numeri fracti habent communem denominatorem. Quoties verò dati fracti numeri non habent denominatorem communem, prius per problema 3 cap. 6 reducendi ſunt ad alios numeros prioribus æquiualentes, qui habeant denominatorem communem: quandoquidem vulgaris Arithmetica non tradat praxim in qua immediatè ſubtrahatur numerus aliquis vnius ſpeciei ex alterius ſpeciei numero.

De Multiplicatione numerorum fractorum vulgarium.

VT inueniatur productum, quod oritur ex multiplicatione duorum numerorum, quando vterque ex illis numeris vulgaris eſt, atque ex duobus, ſaltem vnus eſt fractus. Primo numeratores datorum numerorum multiplicati, dant nouum numeratorem: & etiam denominatores multiplicati dant nouum denominatorem; denique nouus numerator cum nouo denominatore, conſtituit productum ex propoſita multiplicatione.

Exempli Gratia, numerus $\frac{4}{7}$ ducendus ſit in numerum $\frac{3}{5}$; numerator 4 ductus in numeratorem 3, dabit nouum numeratorem 12; & etiam denominator 7, ductus in denominatorem 5, dabit nouum denominatorem 35; quare numerus $\frac{12}{35}$ erit productum propoſitæ multiplicationis; adeoque verum erit, quod numerus $\frac{4}{7}$ ductus in numerum $\frac{3}{5}$, producat $\frac{12}{35}$. Similiter, ſi integer numerus 4 ducendus ſit in integrum numerum $\frac{3}{1}$, numerator integri numeri propoſiti, qui eſt 4, ductus in numeratorem fracti numeri qui eſt 3, dabit nouum numeratorem 12: & propoſiti integri numeri denominator, qui eſt 1, ductus in propoſiti fracti numeri denominatorem, qui eſt 5, dabit nouum denominatorem 5: adeoque productum ex propo-

ſita

ſita multiplicatione, erit numerus $\frac{12}{5}$; quare verum erit, quod numerus 4 ductus in numerum $\frac{3}{5}$, producat $\frac{12}{5}$.

Ad pleniorem propoſitæ multiplicationis intelligentiam, vtile erit reflectere ad definitionem multiplicationis omnibus vulgaribus numeris communem, quam definitionem habes capite 4. vbi etiam monuimus; pro multiplicatione nihil referre, an dati numeri ſint eiuſdem, vel diuerſæ ſpeciei; quæ cauſa eſt, quod pro tradita hic multiplicatione, non requiratur problema 3. capitis 6. additioni atque ſubtractioni inſeruiens.

De Diuiſione numerorum fractorum vulgarium.

VT inueniatur productum ex diuiſione duorum numerorum vulgarium, quorum aliquis ſit fractus numerus. Primo aſſumatur nouus numerus, qui pro numeratore habeat denominatorem diuiſoris dati, atque pro denominatore habeat numeratorem diuiſoris dati: ſiue, quod idem eſt, diuiſor inuertatur. Deinde inueniatur productum ex numero diuidendo ducto in nouum atque aſſumptum numerum; ſic enim habebis productum propoſitæ diuiſionis.

Exempli Gratia, numerus $\frac{4}{7}$ diuidendus ſit, per numerum $\frac{3}{5}$. Primo numerus aſſumendus erit $\frac{5}{3}$; deinde quia productum ex numero $\frac{4}{7}$ ducto in $\frac{5}{3}$, eſt numerus $\frac{20}{21}$: etiam productum propoſitæ diuiſionis, erit $\frac{20}{21}$: atque adeo verum erit, quod numerus $\frac{4}{7}$ diuiſus per numerum $\frac{3}{5}$, producat $\frac{20}{21}$. Similiter, ſi integer numerus 4 diuidendus ſit per $\frac{1}{5}$: numerus aſſumendus erit $\frac{5}{3}$; deinde quia productum ex numero 4 ducto in $\frac{5}{3}$ eſt numerus $\frac{20}{1}$: etiam productum propoſitæ diuiſionis, erit $\frac{10}{3}$: adeoque verum erit, quod 4 diuiſum per $\frac{1}{5}$, producat $\frac{20}{3}$. Pari modo ſi numerus $\frac{3}{5}$ diuidendus ſit per numerum 4: numerus aſſumendus erit $\frac{1}{4}$: & productum ex numero $\frac{3}{5}$ ducto in $\frac{1}{4}$, producit $\frac{3}{10}$; quare numerus $\frac{3}{5}$ diuiſus per numerum 4, producit $\frac{3}{20}$.

Præcedentes praxes additionis, ſubtractionis, & multiplicationis, numerorum vulgarium fractorum, ſatis immediatè patent ex ipſis definitionibus: praxis hic allata pro diuiſione, non immediatè patet ex diuiſionis definitione; immo ſatis difficilis eſt, ſed tamen non difficulter deducitur ex iis, quæ idea Logiſticæ demonſtrata ſunt, ex quibus breuiter, ſed Logiſtico diſcurſu demonſtratam exhibeo prædictam praxim.

Qua-

Qualeſcunque numeros repræſentent litteræ A, B, C, D.

Dico $\frac{A}{B}$ *per* $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{D}{C}$.

Conſtructio. Littera E, repræſentet productum ex $\frac{A}{B}$ *per* $\frac{C}{D}$.

Demonſtratio. Per conſtructionem $\frac{A}{B}$ *per* $\frac{C}{D} = E$: ergo ex conceptu diuiſionis expoſito præcedenti capite 5. etiam $\frac{C}{D}$ *in* $E = \frac{A}{B}$: ſed per theor. 1. partis 4. Ideæ Logiſticæ, $\frac{A}{B} = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{1}{1}$: ergo $\frac{C}{D}$ *in* $E = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{1}{1}$: ergo, per axioma 3. partis 4, Ideæ Logiſticæ; $\frac{C}{D}$ *ad* $\frac{1}{1} = \frac{A}{B}$ *ad* E: ſed, per theor. 21. partis 4. Ideæ Logiſticæ, $\frac{C}{D}$ *ad* $\frac{1}{1} = C$ *ad* D: ergo, $\frac{A}{B}$ *ad* $E = C$ *ad* D: atqui, per coroll: theor. 4. part. 4. Ideę Logiſticę etiã $\frac{C}{C}$ *ad* $\frac{D}{C} = C$ *ad* D: ergo, $\frac{A}{B}$ *ad* $E = \frac{C}{C}$ *ad* $\frac{D}{C}$: ergo, per axioma 3 partis 4. Ideæ Logiſticæ, E *in* $\frac{C}{C} = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{D}{C}$: ſed, per theor. 1. partis 4. Ideæ Logiſticæ, E *in* $\frac{C}{C} = E$: ergo $E = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{D}{C}$: atqui per conſtructionem, etiam $\frac{A}{B}$ *per* $\frac{C}{D} = E$: ergo $\frac{A}{B}$ *per* $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{D}{C}$. Quod erat demonſtrandum.

CAPVT VIII.

De Regula aurea.

Regula quam hic proponimus, ab expoſitoribus practica, atque vulgaris Arithmetica, appellatur aurea: propter eximios, & maximè vtiles vſus quos habet; aliter etiam appellatur regula trium; vel regula proportionum; quia ex tribus datis numeris, docet inuenire quartum proportionalem.

Exempli gratia, ſuppoſito quod dati, ſiue propoſiti ſint tres numeri; quorum primus ſit A, ſecundus B, tertius C, docet regula aurea inuenire quartum numerum D, ita vt numerus tertius C, ad quartum numerum

D, habeat eamdem proportionem, quam habet primus numerus A, ad ſecundum numerum B. Vbi aduertendum, quod ſi productum ex primo numero A, ducto in quartum numerum D, ſit æquale producto ex ſecundo numero B, ducto in tertium numerum C; etiam tertius numerus C, ad quartum numerum D; habebit eamdem proportionem quam primus numerus A, habet ad ſecundum numerum B. Verum ſi productum ex primo numero A, ducto in quartum numerum D, non ſit æquale producto ex ſecundo numero B, ducto in tertium numerum C; tunc tertius numerus C, ad quartum numerum D, non habebit eamdem proportionem quam primus numerus A, habet ad ſecundum numerum B, quod hic notaſſe ſatis erit, pro ſufficienti intelligentia, & vſu regulæ aureæ quam proponimus; ſiquidem ex allata productorum æqualitate infallibiliter inferatur proportionum identitas, ſiue æqualitas, quæ per regulam auream inquiritur. Exponere quid ſit duas proportiones eſſe eaſdem, ſiue æquales difficile eſt, & legitime exponi non poteſt: niſi præmiſſa legitima definitione proportionis; quandoquidem intelligi non poſſit, quid ſit duas proportiones inter ſe æquari: niſi intelligatur, quid ſit proportio; iam verò ne quidem apud eos qui tractant de ſpeculatiua Arithmetica, ſufficienter declaratum inuenio quid ſit illud, quod per vocem proportio intelligendum ſit apud Arithmeticos: atque adeo, ſaltem ego non percipio, quomodo dici poſſint legitime exponere, quid ſit duas proportiones eſſe eaſdem, vel æquales. Hac de re, qui plura deſiderat, conſulere poterit partem quartam Ideæ Logiſticæ.

Vt ex datis tribus numeris, quorum primus ſit A; ſecundus B; tertius C, inueniatur quartus proportionalis numerus D: atque ita abſoluatur regula aurea, de qua hic agitur. Primo, ſecundus numerus B, ducatur in tertium numerum C. Deindè ex hac multiplicatione inuentum productum, diuiſum per primum numerum A, dabit quartum numerum D, quæſitum.

Exempli gratia, ſuppoſito quod primus numerus A ſit 2, ſecundus numerus B ſit 5, tertius numerus C ſit 6: ſecundum numerum 5 ducendo in tertium numerum 6: habebitur productum 30: quod productum diuidendo per primum numerum 2, habebitur numerus 15: qui erit quartus proportionalis quæſitus, ſiue inueniendus per regulam auream; eritque verum: quod tertius numerus 6, ad inuentum quartum numerum 15, habeat eamdem proportionem, quam primus numerus 2, habet ad ſecundum numerum 5: quod verum eſſe, legitime inferes ex eo quod primus numerus 2, ductus in quartum numerum 15, producat 30: & etiam ſecundus numerus 5, ductus in tertium numerum 6, producat 30.

Præſertim pro quæſtionibus practicis, quæ mediante regula aurea

rea ſoluuntur, aduertendum eſt: ſubinde non ſatis apparere quis ex datis, ſiue propoſitis tribus numeris, dici debeat primus, ſecundus, aut tertius: quod tamen neceſſe eſt, pro vſu regulæ aureæ. Vt igitur hoc cognoſcatur, ex ipſa quæſtione practica quæ proponitur, iuuabunt ſubſequentes reflexiones.

Reflexio prima. In quauis practica quæſtione quæ mediante regula aurea ſoluitur, proponuntur tres numeri: ex quibus duo ſunt eiuſdem ſpeciei, reliquus ſpecie conuenit cum numero inueniendo. Deinde, ex datis duobus numeris qui ſunt eiuſdem ſpeciei vnus habet annexam quæſtionem, alter non habet annexam quæſtionem. Exempli gratia, ſemper æquali velocitate ambulando, 3 horis conficio 7 milliaria; 12 horis quot milliariaria conficiam? in propoſita quæſtione agitur de quatuor numeris, ex quibus tres numeri cogniti ſunt, atque proponuntur in ipſa quæſtione: quartus inueniendus eſt: atque de illo quæritur in quæſtione. Prætereà, ex tribus numeris datis, ſiue propoſitis in quæſtione: duo indicant horas quibus iter conficitur: & ſunt numeri eiuſdem ſpeciei; reliquus indicat milliaria confecta, & ſpecie conuenit cum numero de quo quæritur. Iam vero, ex duobus eiuſdem ſpeciei numeris propoſitis, ac datis, vnus, 12, horas indicans, habet annexam quæſtionem: quæritur enim de milliaribus conficiendis 12 horis; alter, 3 horas indicans, non habet annexam quæſtionem: quia non quæritur de milliaribus conficiendis 3 horis; quare in propoſita quæſtione, numerus 3 horarum, & numerus 12 horarum, ſunt numeri dati ſiue propoſiti atque eiuſdem ſpeciei: & numerus 7 milliariorum, ſpecie conuenit cum numero de quo quæritur. Denique numerus 12 horarum, habet annexam quæſtionem: & numerus 3 horarum, non habet annexam quæſtionem. Idem accidit in reliquis quæſtionibus quæ ſoluuntur mediante regula aurea.

Reflexio ſecunda. In quæſtionibus practicis quæ ſoluuntur mediante regula aurea, poſſunt occurrere duo caſus inter ſe diuerſi. Primus caſus eſt, quando incrementum numeri habentis annexam quæſtionem, requirit incrementum numeri quæſiti. Secundus caſus eſt, quando incrementum numeri habentis annexam quæſtionem requirit decrementum numeri quæſiti. Ad quem ex his duobus caſibus pertineat quæuis propoſita quæſtio per regulam auream ſoluenda, ex ipſius quæſtionis conſideratione ſatis commodè infertur. Exempli gratia propoſitæ ſint duæ quæſtiones; prima ſit illa quæ in præcedenti reflexione, pro exemplo propoſita eſt. Secunda quæſtio ſit, 3 homines 7 diebus conſumunt annonam, 12 hohomines quot diebus annonam conſument? In prima quæſtione,

Digitized by Google

numerus 12 horarum, eſt ille, qui annexam habet quæſtionem: & numerus milliariorum conficiendorum eſt ille de quo quæritur; quoniam verò cæteris paribus manifeſtum eſt, pluribus horis plura milliaria confici: etiam patet, quod creſcente numero 12 horarum, debeat creſcere numerus milliariorum conficiendorum: adeoque primam quæſtionem pertinere ad primum caſum. In ſecunda quæſtione, numerus 12 hominum, habet annexam quæſtionem: & numerus dierum quibus annona conſumitur, eſt numerus de quo quęritur; quoniam vero, cæteris paribus manifeſtum eſt, à pluribus hominibus, paucioribus diebus annonam conſumi: etiam patet, quod creſcente numero 12 hominum, debeat decreſcere numerus dierum quibus annona conſumitur; adeoque ſecundam quæſtionem pertinere ad ſecundum caſum.

Reflexio tertia. Vt ſciatur, quis ex tribus numeris datis in aliqua practica quæſtione, quæ mediante regula aurea ſoluitur, debeat dici primus, vel ſecundus, vel tertius. Primo aduertendum eſt, ad quem ex duobus caſibus in ſecunda reflexione propoſitis pertineat quæſtio; etenim ſi quæſtio pertineat ad primum caſum, primus numerus erit ille ex datis duobus eiuſdem ſpeciei numeris, qui non habet annexam quæſtionem: verum ſi quæſtio pertineat ad ſecundum caſum, primus numerus erit ille ex datis duobus numeris eiuſdem ſpeciei, qui annexam habet quæſtionem. Deinde cognito quis ex datis tribus numeris primus appelletur, liberum eſt, ex reliquis duobus vnum pro libitu ſecundum, & alterum tertium appellare. Exempli gratia, quæſtio prima paulò ante propoſita, pertinet ad primum caſum: duo numeri eiuſdem ſpeciei, in iſta quæſtione propoſiti, ſunt 3 horæ, & 12 horæ: atque ex his duobus numeris eiuſdem ſpeciei, numerus 3 horarum, non habet annexam quæſtionem, qui propterea primus erit; reliqui numeri in quæſtione propoſiti ſunt 7 milliaria, & 12 horæ: eritque liberum, numerum 7 milliariorum ſecundum dicere, & numerum 12 horarum tertium appellare; vel certè numerum 12 horarum vocare ſecundum & numerum 7 hominum dicere tertium. Similiter quia ſecunda quęſtio paulò ante propoſita pertinet ad ſecundum caſum: ex datis duobus numeris eiuſdem ſpeciei, quorũ vnus, 3 homines, alter 12 homines indicat: numerus 12 hominnm annexam habens quæſtionem: primus erit: & liberum eſt numerum 7 dierum dicere ſecundum, atque numerum 3 hominum vocare tertium: vel certè numerum 3 hominum ſecundum, & numerum 7 dierum tertium appellare.

Non ignoro apud ſcriptores Arithmeticæ practicæ vſu receptam eſſe, regulæ auræ diſtinctionem; in directam, & euerſam: hanc diſtin-

ſtinctionem neglexi, vt inutilem pro noſtra methodo; in qua regula aurea deberet dici directa, quando primus numerus hoc eſt numerus per quem multiplicationis productum diuidendum eſt, non habet annexam quæſtionem; euerſa dici deberet, quando primus numerus, ſiue numerus per quem multiplicationis productum diuidendum eſt, habet annexam quæſtionem; verum commodius videtur, in diuerſis caſibus diuerſum ex tribus datis numeris primum appellando, præſcribere, vt ſemper productum ex multiplicatione ſecundi, & tertij numeri, per primum diuidatur: quam pro diuerſis illis caſibus, ſubdiuidere regulam auream, in directam, & euerſam, atque pro ſingulis veluti diuerſam ſolutionem afferre.

Demóſtratio regulæ aureæ, immediatè patet ex theoremate 3. partis 4. ideæ logiſticę, ex quo theoremate etiam conſtat duplex alius modus inſtituendi regulam auream: primus eſt, ſecundum numerum prius diuidere per primum, atque huius diuiſionis productum ducere in tertium numerum. Secundus modus eſt, tertium numerum prius diuidere per primum, atque huius diuiſionis productum ducere in ſecundum numerum. Verum hi duo modi ſubinde minus commodi ſunt pro praxi; vtriuſque tamen modi breue exemplum propono, ſupponendo ex datis tribus numeris primum eſſe 4: ſecundum eſſe 8: tertium eſſe 12; hoc poſito, iuxta expoſitam prius regulam auream, 8 ducendo in 12 producitur 96: qui numerus diuiſus per 4 producit 24: adeoque quartus numerus inuentus erit 24. Iuxta primum modum hic inſinuatum, numerum 8 diuidendo per 4 producitur numerus 2: qui ductus in 12 producit 24: adeoque iterum numerus inuentus erit 24. Iuxta ſecundum modum hic inſinuatum numerum 12 diuidendo per 4, producitur numerus 3: qui ductus in numerum 8, producit 24: quare rurſus, vt prius numerus inuentus erit 24. Ex propoſito exemplo apparet: ſemper eumdem numerum produci, ſiue modo prius propoſito, ſiue aliquo ex duobus modis hic inſinuatis inſtituatur regula aurea: idem verum eſſe in quibuſuis alijs numeris, praxis docere poteſt; quare verũ ſit, docet ſupra citatũ theorema: in quo vniuerſaliter demóſtratur, de quibuslibet numeris verũ eſſe, quod hic in vno exẽplo verum eſſe declarauimus.

Non erit inutile hic notare circa tres numeros datos pro regula aurea tres caſus diuerſos poſſe occurrere; primus eſt quando ex datis tribus numeris primus eſt vnitas ſimplex; ſecundus eſt quando ex datis tribus numeris ſecundus, vel tertius eſt vnitas ſimplex: tertius caſus eſt quando nullus ex datis tribus numeris eſt vnitas ſimplex. In primo caſu pro regula aurea nihil requiritur præter multiplicationem. In ſecundo caſu nihil requiritur præter diuiſionem. In

tertio

tertio caſu requiritur multiplicatio, & diuiſio. Hinc, quam verum eſt, regulam auream inſtituere, aut adhibere, nihil aliud eſſe, quam datis tribus numeris quartum proportialem inuenire: tam verè dici poſſet, vnum numerum in alterum ducere, nihil aliud eſſe, quam datis tribus numeris (quorum primus ſit vnitas reliqui duo ſint qui proponuntur pro multiplicatione) inuenire quartum proportionalem. Similiter dici poſſet, vnum numerum per alterum diuidere, nihil aliud eſſe, quam datis tribus numeris (quorum ſecundus, vel tertius eſt vnitas, & reliqui duo ſint illi qui proponuntur pro diuiſione) inuenire quartum proportionalem, Ex quo tandem licebit inferre nullam praxim eſſe poſſibilem, quæ ſufficiat, vt datis quibuslibet tribus numeris, inueniatur quartus proportionalis: & tamen non ſufficiat ad inueniendum productum, quod per multiplicationem, aut diuiſionem, oritur ex quibuslibet duobus numeris propoſitis.

Digitized by Google

LOGISTICÆ DERIVATIO EX VVLGARI ARITHMETICA.

ARGVMENTVM.

IN ſuperioribus capitibus expoſuimus eam partem practica, atque vulgaris Arithmetica, quam in ſcribenda Logiſtica aliunde cognitam ſuppoſuimus; quare tranſeo ad alteram praſentis opuſculi partem: in qua nobis oſtendēdum eſt, quomodo expoſita vulgaris & practica Arithmetica, conueniat cum Arithmetica practica expoſita in primo libro noſtra Logiſtica: vel certe ab illa differat: quod vt clarius atque intelligibilius proponam, praſentem materiam diuido in varias reflexiones; vt ſic commodius, atque per partes oſtendam: Logiſtica noſtra practicam Arithmeticam, nihil aliud eſſe, quam Arithmeticam vulgarem quodammodo ampliatam, atque reductam ad maiorem vniuerſalitatem: & propemodum ſingula, qua practica noſtra Logiſtica propria ſunt, deriuari ab ijs, qua vſu recepta inueniuntur in vulgari, practica Arithmetica, ſuperius declarata.

REFLEXIO I.

Quemadmodum vulgaris Arithmetica, ita etiam Logiſticā practica, quatuor operationibus innititur: & tota conſiſtit in vario vſu iſtarum operationum. Præterea, fere eadem ſunt, præcipua capita, quibus continetur, tum vulgaris, tum Logiſticæ noſtræ Arithmetica practica.

NOn nego, radicum extractionem ita conſiderari poſſe, vt conſtituat operationem Arithmeticā diuerſam à diuiſione: immo quia

hoc

hoc modo videbatur conſiderari ab expoſitoribus Arithmeticæ practicæ: quinque operationes Logiſticas enumero capite 2. libri 1. Logiſticæ: nolebam enim abſque vlla neceſſitate aduerſari illorum placitis, quorum doctrinam ſupponebam. Deinde operationum diuerſitatem deſumendo potius ex modo operandi, aut præſcriptis requiſitis pro operatione, quam ex ipſis operationum definitionibus: quinque potius, quam quatuor operationes Arithmeticæ forent admittendæ; verum, ſi vt nobis placet, ex ipſis definitionibus, de operationum Arithmeticarum diuerſitate ſtatuendum ſit: admiſſis noſtris definitionibus, dici non poteſt, radicis extractionem, eſſe operationem Arithmeticam diuerſam à diuiſione; qua de re conſuli poſſet caput 8. partis ſecundæ Ideæ Logiſticæ: præſuppoſitis tamen definitionibus, à nobis propoſitis in quarto vel quinto capite huius opuſculi. Præterea licet radicum extractio ſpectet ad eam operationem, quæ diuiſio dicitur: atque etiam ad vulgarem, & practicam Arithmeticam pertineat: tamen in ſuperioribus capitibus nuſquam ago de radicum extractione: quandoquidem de illa ſatis fuſe egerim in appendice libri primi Logiſticæ; eamque non ſuppoſuerim aliundè cognitam.

Vniuerſim igitur quatuor vulgaris Arithmeticæ operationes inueniuntur: nimirum, Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuiſio: in ordinato vſu iſtarum operationum conſiſtit vniuerſa Arithmetica practica; quippè quæ aliud non docet, quam ex datis aliquibus numeris, inuenire alios numeros, qui ex datis numeris producuntur, per vnam, vel certè per plures ex quatuor enumeratis operationibus Arithmeticis. Hinc fit, quod practica Arithmetica (expoſita numerorum compendiata ſcriptione) doceat quatuor operationes Arithmeticas: ac poſtea nihil tradat, niſi præcepta quæ dirigunt ordinem ſeruandum inter diuerſas operationes, quando per plures Arithmeticas operationes inueniendus eſt aliquis numerus; neque vſquam doceat inuenire numerum, niſi mediante vna, vel pluribus operationibus Arithmeticis: quod eodem modo verum eſt, ſiue ſermo ſit de vulgari Arithmetica, ſiue ſermo ſit de illa Arithmetica quæ traditur in noſtra Logiſtica. Hoc vt melius intelligatur, prodeſſe poſſet reflexio tertia, quæ proponitur capite quarto partis ſecundæ Ideæ noſtræ Logiſticæ.

Præcipua capita quibus continetur, tum vulgaris, tum etiam Logiſticæ noſtræ Arithmetica practica: dici poſſunt illa quæ ſequuntur.

Primo, numeros compendiata, & commoda ſcriptione repræſentare; atque ita repræſentatos legere. Hac de re agitur capite pri-

mo

Digitized by Google

mo, & ſexto huius opuſculi: & etiam capite primo noſtræ Logiſticæ.

Secundo. Operationum Arithmeticarum producta inuenire, aut repræſentare compendiata, & com noda ſcriptione. Hac de re agitur capite ſecundo, tertio, quarto, quinto, atque ſeptimo huius opuſculi: & capite ſecundo noſtræ Logiſticæ.

Tertio. Compendiata, ſed propter aliquas circumſtantias minus commoda ſcriptione repræſentatos numeros, reducere ad alios æquiualentes numeros, commodiori ſcriptione repræſentatos. Hac de re agitur in problematibus capitis ſexti, & ſparſim in alijs capitibus huius opuſculi, præterea in ſingulis ferè Logiſticæ noſtræ capitibus, quæ ſecundum ſubſequuntur, atque præcedunt octauum, aut ſeptimum.

Quarto. Ex datis aliquibus numeris, inuenire alios, qui ex datis producuntur per plures operationes Arithmeticas. Hac de re agit regula aurea propoſita capite octauo huius opuſculi; & etiam caput nonum ac ſeptimum noſtrę Logiſticæ. Prętereа, tam Arithmeticæ vulgaris, quam Logiſticæ practicæ præſcripta fere omnia, quæ non pertinent ad tria capita hic prius enumerata.

REFLEXIO II.

Vſitatum eſt apud Arithmeticos, conſiderare numeros actiuos, & paſſiuos; item numeros, tum formaliter, tum materialiter ſumptos. Logiſtica noſtra, à vulgari Arithmetica, differt tantum quo ad numeros compendiatè ſcriptos, atque formaliter ſumptos.

PRæter indiuidua nihil indicant numeri, quodque vnum, vel plura indiuidua indicat, numerus dicitur: in diuerſis circumſtantijs diuerſimode intelligitur numerus; ſubinde enim intelligitur in ſenſu actiuo, vt ſignificet illud quod indicat, ſiue repræſentat indiuidua; atque à nobis dicitur numerus actiuus, vel ſimpliciter numerus appellatur: etenim de actiuis nemeris ſermo eſt; quando oppoſitum non dicitur: vel per circumſtantias non ſufficienter inſinuatur. Subinde numerus intelligitur in ſenſu paſſiuo, vt ſignificet ipſa indiuidua indicata à numero actiuo: atque à nobis dicitur numerus paſſiuus. Prætera numerus aliquando intelligitur in ſenſu formali, ita vt ſignificet numerum conſideratum, vt talis numerus eſt, tum quo ad vnitates per quas indicat indiuidua, tum quo ad indi-

uidua quæ indicat: atque à nobis dicitur numerus formaliter ſumptus. Aliquando numerus intelligitur in ſenſu materiali, vt ſignificet numerum in quantum plura, vel pauciora indiuidua indicat: atque à nobis dicitur numerus materialiter ſumptus. Vt conſtet in ſingulis expoſitis ſenſibus adhiberi, atque intelligi numeros: non tantum in noſtra Logiſtica, ſed etiam in familiari ſermone, atque adeo apud eos, qui non vtuntur niſi vulgari Arithmetica: ſatis erit afferre paucas loquutiones familiariter vſitatas; ex quibus ſufficienter appareant ſenſus à nobis enumerati. Primo ſuppoſito quod duo homines,inſtituendo, Exempli gratia regulam auream,ſinguli inueniant numerum indicantem decem aureos: rectè dicitur, ſingulos per regulam auream inueniſſe numerum decem aureorum; & ex ipſa loquutione ſatis patet, quod ſermo ſit de numeris quos actiuos appellauimus. Secundo, ſi dicatur, quod duo homines pro mercede acceperint eumdem aureorum numerum, vel decem aureorum numerum: ex ipſa loquutione ſatis patet quod ſermo ſit de numeris quos paſſiuos diximus. Tertio,conſiderentur ſequentes numeri; primus ſit,quatuor ternarij hominum: ſecundus ſit, tres quaternarij hominum;tertius ſit vigintiquatuor ſecundæ: quartus ſit, triginta ſex tertiæ: quintus ſit, duodecim homines, ſextus ſit, duodecim equi. De iſtis numeris, etiam apud eos qui tradunt vulgarem Arithmeticam, verificatur: quod omnes inter ſe ſpecie differant: ac præterea quód omnes inter ſe æquales ſint. Quando de prædictis ſex numeris aſſeritur, quod omnes inter ſe ſpecie differant, agitur de numeris formaliter ſumptis; etenim primus, ſecundus, & quintus: inter ſe non differunt, niſi quo ad vnitates per quas indicant duodecim hominum indiuidua; præterea, quintus, & ſextus numerus, inter ſe non differunt, niſi quo ad ipſa indiuidua, quæ indicant: ergo quando ſex iſti numeri dicuntur omnes inter ſe ſpecie differre; conſiderantur tum quo ad vnitates per quas indicant, tum etiam quo ad indiuidua, quæ indicant: atque adeo conſiderantur numeri formaliter ſumpti. Quarto,quando prædicti ſex numeri dicuntur omnes inter ſe æquales eſſe,agitur de numeris materialiter ſumptis; etenim æquales dicuntur in quantum ſinguli indicant æquè multa, ſiue duodecim indiuidua; cui æqualitati non aduerſatur; quod duodecim indiuidua indicata à primo numero, ſint homines; quodque duodecim indiuidua indicata à tertio numero, ſint vnitates ſimplices; item duodecim indiuidua indicata à ſexto numero ſint equi. Eidem æqualitati non aduerſatur, quod in quinque primis numeris, per diuerſas vnitates indicentur duodecim indiuidua; ex quibus patet, æqualitatem tan-

tum

Digitized by Google

tum affirmari de iſtis numeris, conſideratis in quantum æquè multa indiuidua indicant: hoc eſt de numeris materialiter ſumptis.

Hæc ſufficere arbitror, vt conſtet, non tantum in noſtra Logiſtica, ſed etiam apud eos, qui vulgari Arithmetica vtuntur, in diuerſis circumſtantijs, diuerſo ſenſu intelligi numeros: eoſque aliquando intelligi in ſenſu actiuo, aliquando in ſenſu paſſiuo, aliquando in ſenſu formali, aliquando in ſenſu materiali; ac prætereà conſtat, quid ſint numeri actiui, vel paſſiui, vel formaliter, aut materialiter ſumpti: neque hic videntur plura addenda circa primam partem propoſitæ reflexionis, in qua aſſeritur etiam in Vulgari Arithmetica conſiderari numeros, formaliter, atque materialiter ſumptos; etenim manifeſtum eſt vulgaris Arithmeticæ terminos non excedere duas aſſertiones paulò ante propoſitas, in quarum vna aſſeritur ſex numeros ibidem propoſitos ſpecie inter ſe differre, in altera verò aſſeritur eoſdem iſtos ſex numeros inter ſe æquales eſſe: ſed etiam in priori aſſertione agitur de numeris formaliter ſumptis, in poſteriori verò agitur de numeris materialiter ſumptis, vt conſtat ex ijs quæ paulò ante notauimus: ergo in vulgari Arithmetica ſubinde agitur de numeris formaliter ſumptis, ſubinde verò agitur de numeris materialiter ſumptis: atque adeo in vulgari Arithmetica conſiderantur numeri tum formaliter, tum etiam materialiter ſumpti.

Vt conſtet altera pars propoſitæ reflexionis: primo oſtendendum eſt, vulgarem Arithmeticam, atque Logiſticam noſtram inter ſe non differre, quo ad numeros paſſiuos, hoc eſt, nulla inueniri indiuidua per Logiſticos numeros indicabilia, quæ indicari non poſſint per numeros vulgares: pro quo in memoriam reuocandum eſt, quod de ſimplici vulgari vnitate diximus: eam ſcilicet ex ſe indifferentem eſſe, ad ſignificandum quodcũque indiuiduum; neque excogitari, aut fingi poſſe vllum indiuiduum, quod ex vi alicuius hypotheſis, indicari non poſſit, à ſimplici, atque vulgari vnitate: quoniam igitur indiuidua indicabilia à numeris Logiſticis, ſunt indiuidua: & quælibet indiuidua indicari poſſint à ſimplicibus, atque vulgaribus vnitatibus: patet non inueniri vlla indiuidua indicabilia à numeris Logiſticis, quæ à vulgaribus atque ſimplicibus vnitatibus indicabilia non ſint: ergo indiuidua indicabilia à numeris Logiſticis non differunt ab indiuiduis indicabilibus à numeris vulgaribus; quandoquidem igitur numeri Logiſtici paſſiui, atque poſſibiles, non ſint aliud, quam indiuidua indicabilia à numeris Logiſticis: & numeri vulgares paſſiui poſſibiles non ſint aliud, quam indiuidua indicabilia à numeris vulgaribus; patet etiam numeros Logiſticos paſ-

ſiuos atque poſſibiles, non eſſe diuerſos, à numeris vulgaribus paſſiuis atque poſſibilibus: & conſequenter vulgarem Arithmeticam atque Logiſticam noſtram inter ſe non differre quo ad numeros paſſiuos.

Vulgarem Arithmeticam, atque Logiſticam noſtram, inter ſe non differre, quo ad numeros materialiter ſumptos: etiam ſatis manifeſtum eſt, ex ijs quæ diximus de numeris materialiter ſumptis; etenim inter numeros materialiter ſumptos, alia differentia non inuenitur, quam quod vnus, altero plura, vel pauciora indiuidua indicet: iam verò ſatis patet quod nullus numerus Logiſticus, tam multa, vel tam pauca indiuidua indicet, vt æque multa, aut pauca indiuidua indicari non poſſint à numero vulgari: igitur Arithmetica vulgaris, atque Logiſtica noſtra inter ſe non differunt, quo ad numeros materialiter ſumptos.

Reliquum eſt vt oſtendam, vulgarem Arithmeticam atque Logiſticam noſtram, inter ſe differre, quo ad numeros formaliter ſumptos; pro quo duplex caſus diſtinguendus eſt: primus caſus ſit, quando ſermo eſt de numeris longiori ſcriptione propoſitis: ſecundus caſus ſit, quando ſermo eſt de numeris repræſentatis compendiatis illis ſcriptionibus, quæ in vulgari Arithmetica, vel in noſtra Logiſtica aſſumuntur, atque adhibentur pro inſtituendis operationibus. Placet prius conſiderare ſecundum caſum, ac deinde tranſire ad primum. Pro ſecundo caſu aduertendum eſt in vulgari Arithmetica deeſſe ſcriptiones compendiatas quibus inter ſe diſtinguantur vnitates poſitiuæ, & negatiuæ: item ſcriptiones compendiatas quibus repræſententur vnitates denominatæ aut radicales: igitur Logiſtica noſtra, poteſt compendiata ſcriptione repræſentare aliquas vnitates formaliter ſumptas, quas compendiata ſcriptione repræſentare non poteſt vulgaris Arithmetica: ergo numeri logiſtici compendiata ſcriptione repræſentati, poſſunt indicare indiuidua, per aliquas vnitates formaliter ſumptas, per quas compendiata ſcriptione indiuidua repræſentare non poteſt vulgaris Arithmetica; ergo compendiata ſcriptione repræſentati numeri vulgares, non conueniunt cum numeris Logiſticis, quo ad vnitates formaliter ſumptas per quas indiuidua repræſentare poſſunt; ſed numeri qui non conueniunt quo ad vnitates formaliter ſumptas, per quas repræſentant indiuidua, ſunt numeri formaliter ſumpti qui inter ſe non conueniunt: ergo inter ſe non conueniunt numeri vulgares, & Logiſtici, formaliter ſumpti, atque compendiata ſcriptione repræſentati: atque adeo vulgaris Arithmetica cum Logiſtica noſtra non cõuenit quo ad numeros formaliter ſump-

tos,

tos, & compendiata ſcriptione repræſentatos. Notandum hic eſt, quod tota differentia propter quam non conueniunt iſti numeri, præciſè, & adæquatè dependeat, atque inferatur, ex diuerſis vnitatibus, non tantum formaliter ſumptis, vel tantum compendiatè ſcriptis, ſed ex diuerſis vnitatibus, & formaliter ſumptis, & etiam compendiatè ſcriptis: atque hoc vnico ex capite habetur omnis diuerſitas quæ inuenitur inter vulgaris Arithmeticæ, & Logiſticæ noſtræ numeros: quod melius conſtabit ex conſideratione primi caſus paulò ante propoſiti, ſiue conſiderando numeros vulgares, atque Logiſticos productiori ſcriptione repræſentatos, independenter à compendiata ſcriptione. Hoc caſu vulgaris Arithmeticæ, & Logiſticæ noſtræ numeri formaliter ſumpti, conueniunt inter ſe: & verum eſt vulgarem Arithmeticam, & Logiſticam noſtram non differre inter ſe quo ad numeros formaliter ſumptos, ſed non repræſentatos compendiata ſcriptione: etenim omnis differentia quæ inuenitur inter numeros formaliter ſumptos: vel habetur ex diuerſitate indiuiduorum quæ à numeris indicantur, vel ex diuerſitate vnitatum per quas indiuidua indicantur, quando tam indiuidua indicata, quã vnitates indicantes conſiderantur in ſenſu formali, ſiue vt talia indiuidua, aut tales vnitates ſunt: quare, ſi non dentur vlla indiuidua formaliter ſumpta, neque vllæ vnitates formaliter ſumptæ, quæ independenter à compendiata ſcriptione exprimi poſſint à Logiſtica & tamen exprimi non poſſint à vulgari Arithmetica: manifeſtum eſt vulgarem Arithmeticam atque Logiſticam noſtram inter ſe non differre, quo ad numeros formaliter ſumptos, independenter à compendiata ſcriptione; iam vero non dari indiuidua formaliter ſumpta, quæ independenter à compendiata ſcriptione indicabilia ſint à logiſtica, & tamen à vulgari Arithmetica indicari non poſſint: ſatis manifeſtum eſt, quandoquidem paulò ante oſtenſum ſit, vulgaris Arithmeticæ, atque Logiſticæ noſtræ numeros paſſiuos, inter ſe non differre: numeri enim paſſiui, nihil aliud ſunt quam ipſa indiuidua à numeris indicata: hinc indiuidua à numeris vulgaribus atque Logiſticis indicata, atque formaliter ſumpta, inter ſe differrent, etiam inter vulgaris Arithmeticæ & Logiſticæ noſtræ numeros paſſiuos, inueniretur differentia. Deinde, non dari vnitates formaliter ſumptas, quæ independenter à compendiata ſcriptione indicabiles ſint à Logiſtica, & tamen indicari non poſſint à vulgari Arithmetica, patet ex eo, quod ad indiuidua indicanda nullæ aliæ vnitates à vulgaribus diuerſæ, aſſumantur in Logiſtica, quam vnitates denominatæ, radicales, & negatiuæ, quæ ſingulæ à nobis exponuntur vocibus vſitatis in vulgari Arithmetica, atque adeo

inde-

Digitized by Google

independenter à compendiata ſcriptione, communes ſunt, tam vulgari Arithmeticæ quam noſtræ Logiſticæ; quare independenter à compendiata ſcriptione, non inueniuntur vnitates exprimibiles à Logiſtica, quæ à vulgari Arithmetica exprimibiles non ſint; præterea tam vulgari Arithmeticæ quam Logiſticæ, commune eſt, expreſſas vnitates conſiderare, vt tales vnitates ſunt: igitur independendenter à compendiata ſcriptione, non dantur vnitates formaliter ſumptæ exprimibiles à Logiſtica, quæ à vulgari Arithmetica exprimibiles non ſint.

Ex iis quæ hic paulo fuſius propoſita ſunt, conſtant ſingula quæ in reflexionis titulo notantur: atque adeo inter Logiſticæ noſtræ, & vulgaris Arithmeticæ numeros, differentiam non inueniri, quæ non dependeat à compendiata ſcriptione, quod notatu dignum exiſtimaui, & fortaſſis melius intelligetur ex ſubſequenti reflexione in qua oſtendimus, quomodo ex vulgaris Arithmeticæ compendiatis ſcriptionibus deriuentur illæ ſcriptiones compendiatæ, quibus in noſtra Logiſtica exprimuntur numeri, denominati, radicales, & negatiui; etenim iſtos tantum numeros compendiatè repræſentatos addimus numeris, qui in vulgari Arithmetica repræſentantur compendiata ſcriptione: atque ex dicendis de deriuatione ſcriptionum quas adhibemus, pro compendiata repræſentatione numerorum denominatorum, radicalium, & negatiuorum; apparebit, non iſtos numeros, etiam formaliter ſumptos, ſed ſolas compendiatas ſcriptiones deeſſe in vulgari Arithmetica.

REFLEXIO III.

Ex vulgari Arithmetica practica deriuantur ſcriptiones compendiatæ, quibus in Logiſtica noſtra repræſentantur numeri denominati, radicales, & negatiui.

PRæter vulgares numeros, in noſtra Logiſtica conſiderantur, atque adhibentur, numeri denominati, radicales, & negatiui: his numeris non vtitur vulgaris Arithmetica: ſinguli tamen ex vulgari Arithmetica deriuantur: hoc eſt, praxes quibus in Logiſtica compendiatè exprimuntur, deſumptæ ſunt ex praxibus pro numerorum compendiata repræſentatione vſitatis, in practica atque vulgari Arithmetica. Deriuationem prædictorum numerorum noſtræ Logiſticæ paucis expono.

Pro deriuatione ſcriptionis compendiatæ, qua in noſtra Logiſtica repræſentantur numeri qui denominati appellantur: poſita ſit hypo-

hypotheſis, quod vnitas ſimplex ſit vnus homo; manente hac hypotheſi, ad indicandos decem libros, non ſufficit ſcribere 10: quandoquidem ex vi hypotheſis, numerus 10 ſimpliciter poſitus, indicet decem homines: vt igitur hoc caſu vulgaris Arithmetica, aliqua ex parte compendiata ſcriptione indicet decem libros, duplicem praxim habet; prima eſt, ſcribere, 10 libri. Secunda eſt, priori hypotheſi alteram addere, in qua ſupponatur, per litteram A. intelligi debere librum; & facta hac hypotheſi, ſcribere, decem A. Ex duabus compendiatis ſcriptionibus hic propoſitis, primam ſuperius inuenies, vbi capite 2, vel 5. agimus de Additione, vel Subtractione numerorum diuerſæ ſpeciei: & non facile inuenies librum qui agat de vulgari practica Arithmetica, in quo paſſim non adhibeatur prima ſcriptio compendiata. Secunda ſcriptio compendiata adeo familiaris eſt, in tota, & qualibet parte Arithmeticæ, atque Geometriæ: vt vix vllam paginam inuenias: (Exempli Gratia in toto Euclide) in qua huiuſmodi ſcriptio non adhibeatur: nihil enim familiarius, quam alphabeti litteras ita adhibere, vt breuiter in ſcriptione repræſentent, triangulum, circulum, lineam, numerum, aut quoduis aliud ens, quod ex vi hypotheſis ſignificant. Itaque in caſu paulo ante propoſito, in quo vnitas ſimplex hominem ſignificat: in vulgari Arithmetica maximè vſitatæ inueniuntur duæ praxes, quibus aliqua ex parte cōpendiata ſcriptione repræſentari poſſint decem libri. Prima eſt, ſcribere 10 libri. Secunda eſt, facta hypotheſi, quod A librum ſignificet, ſcribere decem A. Ex his reſultans tertia praxis, hæc eſt: ſupponendo quod A librum ſignificet, ſcribere 10 A. Verum hæc tertia praxis vſitata ſit in vulgari Arithmetica, non controuerto: eam ex duabus prioribus, atque maxime vſitatis praxibus immediate deriuari, manifeſtum eſt; hac tertia praxi compendiate ſcripti numeri, ſunt illi, qui in noſtra Logiſtica appellantur numeri denominati: patet igitur Logiſticæ noſtræ numeros denominatos, immediate deriuari ex praxibus maxime vſitatis in vulgari Arithmetica, ſaltem quo ad eam partem quæ conſtat ex numeratore & dignitate: quandoquidem per vocem dignitas, nihil aliud intelligamus, quam alphabeti litteram, vt paulo ante diximus, aſſumptam, ad ſignificandum aliquid. De denominatore numerorum denominatorum paulo poſt recurret ſermo.

Numeri vulgares fracti, ſignificant productum ex diuiſione: vt ſatis patet ex prima praxi diuiſionis, propoſita in quinto capite, atque ex ijs quæ dicta ſunt de vulgaribus fractis numeris; quod adeo verum eſt, vt productum ex numero 2 diuiſo per numerum 3, nihil

nihil aliud ſit, quam duæ tertiæ: & etiam duæ tertiæ nihil aliud ſint, quam productum ex numero 2 diuiſo per numerum 3. Quoniam igitur vulgaris Arithmetica ſpecialem atque compendiatam ſcriptionem aſſumit, vt repræſentet vulgares fractos numeros: manifeſtum eſt vulgarem Arithmeticam aſſumere ſpecialem atque compendiatam ſcriptionem, qua repræſentet producta diuiſionis. Deinde, quia in hac compendiata ſcriptione adhibet ipſos diuiſionis genitores, vt ſatis conſtat ex dictis cap. 6. etiam patet, vulgarem Arithmeticam aſſumere ſpecialem, atque compendiatam ſcriptionem, in qua per genitores repræſentat productum diuiſionis. Maxime vtilem hanc praxim ampliando, atque imitando: docemus duo diuerſa: quorum primum eſt, compendiata ſcriptione exhibere productum illius diuiſionis, quæ radicis extractio dicitur: hoc eſt ſcribere numeros radicales: & ſimiliter compendiata ſcriptione exhibere productum illius multiplicationis, in qua numerus aliquis in ſeipſum ſemel aut ſæpius ducitur. Alterum eſt, compendiata ſcriptione exhibere productum cuiuslibet operationis diuerſæ à duabus hic enumeratis: de hac ſecunda ſcriptione agitur in reflexione 4. Ad primam ſcriptionem pertinent tum numeri radicales, tum etiam numeri denominati in quantum conſtant ex numeratore, dignitate, & denominatore. Paulo ante oſtendimus quomodo ex compendiata ſcriptione maxime vſitata in vulgari Arithmetica, deriuetur ea pars numeri denominati, quæ numeratorem atque dignitatem repræſentat; huiuſmodi numeri denominati, præter numeratorem atque dignitatem, etiam inuoluunt denominatorem; quod nouum non eſt, immo adeo vſitatum in vulgari Arithmetica, vt nulli vulgares numeri inueniantur, qui non conſtent ex numeratore & denominatore: vt dictum eſt capite 6. vbi etiam notauimus, in ſcribendis numeris vulgaribus, liberum eſſe, vel denominatorem expreſsè ponere, vel denominatorem ſubaudire, quoties denominator eſt vnitas ſimplex: eumdem verò denominatorem expreſsè ponendum eſſe, quoties diuerſus eſt à ſimplici vnitate; hanc legem in vulgari Arithmetica vſitatam pro denominatoribus vulgarium numerorum, imitamur, vel vt verius dicam retinemus: tum pro denominatoribus numerorum denominatorum, tum etiam pro denominatoribus radicalium numerorum. Deinde ſicut in vulgaris Arithmeticæ ſcriptione, interpoſita lineola, numeratori deorſum ſuccedit denominator: ſic in numeris denominatis interpoſita dignitate, numeratori dextrorſum ſuccedit denominator. Denique quemadmodum in vulgaribus numeris denominator, indicat, per quid ſimplex vnitas diuidi debeat, vt habeatur vna ex vnitatibus

indi-

indicatis à numeratore: ita denominator numeri denominati, indicat, quot vnitates indicatæ à dignitate ſucceſſiue multiplicari debeant, vt habeatur vna ex vnitatibus indicatis à numeratore. Ex his patet nihil inueniri in Logiſticæ noſtræ numeris denominatis, quod diriuatum non ſit ex vulgari Arithmetica.

Pro deriuatione numerorum radicalium, aduertendum eſt, quod pro illa diuiſione quæ radicis extractio dicitur, non detur niſi vnus ex genitoribus diuiſionis: pro reliquis diuiſionibus, datur vterque genitor diuiſionis: de quo plura videri poſſunt cap. 8. partis 2. Ideæ Logiſticæ. Iam verò, pro ſcriptione, qua vulgaris Arithmetica compendiate exprimit diuiſionis productum, requiritur vterque genitor diuiſionis: atque adeo hæc ſcriptio inutilis eſt, vt per datum radicis genitorem exprimatur radix; neque inuenio ſcriptionem aliquam compendiatam, atque communi vſu receptam ab expoſitionibus vulgaris Arithmeticæ: per quam propoſiti vulgaris numeri, quælibet radix, commode exprimatur per datum genitorem: itaque prius conſiderando productiorem ſcriptionem, qua propoſiti numeri quælibet radix poſſit exprimi, atque hanc ſcriptionem contrahendo, efformo eam ſcriptionem compendiatam, qua vtor in Logiſtica; in quem finem notandum eſt, quod propoſiti numeri A radix, dicatur, ille numerus, qui per vnam aut plures diuiſiones producitur ex numero A, ſuppoſito ſemper diuiſore eodem, atque æquali ipſi radici. Exem. Gra. numeri 16 radix prima eſt numerus 4: quia 16 ſemel diuiſum per 4 producit 4. Rurſus numeri 16 radix tertia eſt numerus 2: quia 16 tertio diuiſum per 2, producit 2, cum enim 16 diuiſum per 2 producat 8, & rurſus 8 diuiſum per 2 producat 4, ac denique 4 diuiſum per 2 producat 2; patet 16 tertio diuiſum per 2 producere 2. Ex hoc exemplo etiam patet, eiuſdem numeri diuerſas radices dari: atque hanc diuerſitatem dependere ex eo, quod numerus qui radix dicitur, ex numero cuius radix dicitur, producatur per plures aut pauciores diuiſiones; vt igitur longiori ſcriptione, per ipſum numerum 16 exprimantur, atque inter ſe diſtinguantur, diuerſæ atque paulo ante propoſitæ eius radices: ad exprimendum numerum 4, ſcribi poſſet, radix, vnica diuiſione producta ex numero 16. Item ad exprimendum numerum 2, ſcribi poſſet, radix tribus diuiſionibus producta ex numero 16. Ex his ſatis manifeſtum eſt, quomodo longiori ſcriptione (maxime intelligibili apud eos, qui vulgarem Arithmeticam prorſus non ignorant) per numerum exprimi poſſit quælibet eius radix, ſiue illa producatur per vnam, ſiue per plures, & quotlibet diuiſiones; iam verò longiores illas ſcriptiones contrahendo, inuenio eam ſcriptionem

n*o*m, quam adhibeo pro numeris radicalibus, ſiue, vt per propoſitum quemuis numerum, indicem quamlibet eius radicem; & primo quidem, pro integra voce radix aſſumo litteram R, quæ compendioſè repræſentat vocem radix: huic ſucceſſiue adſcribendo denominatorem, nota Arithmetica expreſſum, compendioſe indico, per quot diuiſiones producatur radix, præterea interpoſito aſteriſmo ipſi denominatori ſucceſſiue adſcribo numerum cuius radix ſignificatur. Denique ante litteram R, quæ repræſentat vocem radix, ſcribo numeratorem, ſiue numerum vulgarem indicantem quot radices ſignificentur à ſcriptione. Sic Exempli Gratia ſcriptio, 1 R 1 ✱ 16, legitur, vna radix prima numeri ſexdecim: vel vna radix prima ſexdecim: ſed ſenſus idem eſt, ac ſi diceretur, vna radix, vnica diuiſione producta ex numero ſexdecim. Similiter ſcriptio 1 R 3 ✱ 16, legitur, vna radix tertia ſexdecim: ſenſus tamen idem eſt ac ſi diceretur, vna radix triplici diuiſione producta ex numero ſexdecim. Pari modo ſcriptio 4 R 1 ✱ 16, legitur, quatuor radices primæ numeri ſexdecim: & ſenſus idem eſt, ac ſi diceretur, quatuor radices quæ ſingulæ vnica diuiſione producuntur ex numero ſexdecim. Item ſcriptio 4 R 3 ✱ 16, legitur, quatuor radices tertiæ numeri ſexdecim: ſenſus idem eſt, ac ſi diceretur, quatuor radices quæ ſingulæ triplici diuiſione producuntur ex numero ſexdecim. Ex his ſatis apparet, vnde deriuata ſit illa ſcriptio Logiſtica, qua repræſentamus numeros radicales. Apud vulgaris Arithmeticæ Scriptores ſatis familiare eſt, radicem quadratam appellare, quam nos primam radicem dicimus; & radicem cubicam nominare, quam nos vocamus radicem ſecundam; quem vſum, non ſolum non retinemus: ſed planè reijcimus, vt noxium pro noſtra Logiſtica: à qua pro viribus putamus remouendas loquutiones improprias, analogicas, & æquiuocationibus, atque erroribus obnoxias: tales reputamus paulo ante enumeratas, quas non admittimus. Reliquas verò quibus ab Algebræ Scriptoribus exprimuntur radices tertiæ, quartæ, quintæ, &c. non tantum reijcimus, ſed deteſtamur, non minus quam reliquam ipſorum ſuppellectilem chimæricam.

Vt numeros poſitiuos & negatiuos compendiata ſcriptione diſtingueremus inter ſe: hæc lex aſſumpta eſt in noſtra Logiſtica: nimirum, vt omnes numeri cenſeantur negatiui, qui expreſsè afficiuntur ſigno negatiuo, hoc eſt ſigno −; reliqui verò numeri habeantur poſitiui. Similis lex paſſim vſitata inuenitur; conſidera ſi placet duas ſcriptiones non compendiatas, prima ſit homo; ſecunda ſit negatio hominis; ſecunda ſcriptio ſignificat negationem eius quod à prima indicatur: atque duæ iſtæ ſcriptiones inter ſe tantum diffe-

differunt penes particulam negatiuam, quæ inuenitur in ſecunda ſcriptione, ſed non inuenitur in prima ſcriptione. Similiter poſito quod prima ſcriptio ſit non homo; ſecunda ſit negatio non hominis; rurſus ſecunda ſcriptio ſignificat negationem eius, quod per primam ſcriptionem indicatur: atque duæ iſtæ ſcriptiones inter ſe non differunt, quam penes particulam negatiuam, quæ in ſecunda inuenitur, ſed deeſt in prima ſcriptione. Simili planè modo maxime familiari vſu receptum eſt, inter ſe per ſolam particulam negatiuam diſtinguere quaslibet duas ſcriptiones, quarum vna ſignificat negationem eius, quod ſignificatur per alteram. Iam verò ab hoc communi vſu non aliter recedimus quam compendiata ſcriptione repræſentando particulam negatiuam: atque ſtatuendo, vt ſignum —, compendiatè indicans particulam negatiuam, efficiat, vt ſcriptio affecta hoc ſigno, ſignificet negationem eius, quod ſignificaret tali ſigno deſtituta: hoc enim eſt quod præſcribitur in lege paulo ante inſinuata, atque aſſumpta in noſtra Logiſtica, pro diſtinctione numerorum, qui à nobis dicuntur poſitiui, aut negatiui; de quibus conſuli poteſt ſecũda pars appendicis libri ſecundi noſtrę Logiſticæ.

Expoſita deriuatione ſcriptionum, quibus in Logiſtica compendiatè indicamus numeros denominatos, radicales, & negatiuos: non erit inutile, ex ſingulis iſtis compendiatis ſcriptionibus, aliquam pro exemplo proponere, atque eius ſignificationem exponere, vocibus pro vulgari Aritmetica vſitatis: vt ſic melius appareat, vulgarem Arithmeticam non carere aut iſtis numeris, aut modo eos exprimendi, (tametſi de numeris formaliter ſumptis agatur) ſed tantum carere illa compendiata ſcriptione, qua in Logiſtica à nobis exprimuntur.

Numerus denominatus 4 a 3, formaliter ſumptus, nihil eſt aliud, quam numerus A bis in ſe, ac deinde ductus in quatuor, ſumptus formaliter: vel formaliter ſumpti quatuor numeri, qui ſinguli producuntur ex numero A bis ductio in ſe.

Numerus radicalis 3 R 1 * 16, formaliter ſumptus, nihil eſt aliud, quam formaliter ſumptum productum ex vna diuiſione numeri ſexdecim, in qua diuiſor æquatur producto diuiſionis, multiplicatum per tria; vel formaliter ſumpti tres numeri, qui ſinguli producuntur vnica diuiſione numeri ſexdecim, in qua productum diuiſionis diuiſori æquatur,

Numerus negatiuus — 4, formaliter ſumptus, nihil eſt aliud, quam numerus quatuor negatiouum, ſiue priuationum, vnitatis ſimplicis, formaliter ſumptus.

Planè rudis eſſet etiam in Arithmetica vulgari, qui non percipe-

Digitized by Google

ret quid ſignificent numeri hic expreſſi productiori ſcriptione: neque negari poteſt iſtos numeros pertinere ad vulgarem Arithmeticam: vel vt verius dicam, prædictos numeros præcognitos ſupponi, apud expoſitores vulgaris practicæ Arithmeticæ; ex multis quæ hoc mihi perſuadent duo hic ſubijcio. Primum eſt, quod à compendiatis numerorum ſcriptionibus ſumant exordium. Secundum eſt, quod non inueniam vbi longioribus ſcriptionibus expreſſos numeros exponant. Practicæ Arithmeticæ expoſitoribus ignoſcendum eſt, ſi ſolam praxim doceant, atque ex ſpeculatiua Arithmetica ſupponant notitiam numerorum, quorum practicum vſum exponunt; immo oppoſitum facere nihil aliud eſſet, quam cum ſpeculatiua Arithmetica practicam confundere, atque permiſcere. Vt tamen verum fatear prorſus non percipio, vnde prædictos numeros cognitos ſupponant, vel quare illos non definiant atque exponant, qui docent ſpeculatiuam Arithmeticam, ex qua deriuatur Arithmetica, vulgaris practica. Vel ſi forte alicui videatur ab ipſis ſufficienter declaratos numeros, quando ſtatuunt; primo, vnitatem eſſe ſecundum quam vnumquodque eorum quæ ſunt vnum dicitur; ſecundo, numerum eſſe compoſitam ex vnitatibus mulitudinem; denique præter duas iſtas definitiones propemodum nihil vlterius afferant, conducens ad numerorum intelligentiam: ſi inquam alicui videatur, has duas definitiones ſufficienter declarare, quid per vnitatem, aut numerum intelligendum ſit: ingenij acumen, atque perſpicacitatem laudo, atque ſuſpicio. Quam parum definitiones iſtæ proſint tenuitati meæ, colliges ex ſubſequentibus paucis dubijs; etenim ex multis pauca tantum afferre volui, quandoquidem pauca ſufficiant, vt appareat, quam obſcura mihi ſint, quæ ab aliquibus, vel habentur, vel ſaltem aſſeruntur clariſſima.

Primo, quemadmodum aliud eſt abſtracta albedo, à qua ſubiectum album dicitur; aliud verò ſubiectum habens abſtractam albedinem, quodque ab abſtracta albedine quam habet, album dicitur: ita etiam aliud eſt, abſtracta vnitas, à qua ſubiectum vnum dicitur: aliud vero ſubiectum habens abſtractam vnitatem, quodque ab abſtracta vnitate quam habet vnum dicitur, iam verò, niſi fallor, vox vnitas intelligi poteſt in duplici diuerſo ſenſu: nimirùm in ſenſu ab ſtracto, vt ſignificet abſtractam vnitatem, à qua ſubiectum habens illam abſtractam vnitatem, vnum dicitur: deinde in ſenſu concreto, vt ſignificet ſubiectum habens abſtractam vnitatem, atque idem quod ſignificat vox vnum. Quæro igitur an vnitas paulo ante definita ſit vnitas intellecta in ſenſu abſtracto, vel certe ſit vnitas intellecta in ſenſu concreto? Si ſecundum dicendum ſit, ego certe non video,

deo, quomodo hoc intelligi poſſit ex definitione propoſita, in qua nihil inuenio priorem ſenſum excludens, atque legentem determinans ad ſecundum ſenſum. Si dicendum ſit prædictam definitionem indifferentem eſſe ad vtrumque ſenſum, vel quod in primo ſenſu intelligenda ſit; ex noſtra Logiſtica, atque eius Idea intelligere poteris, quod licet in hoc Romano Collegio per quindecim integros annos Matheſim publice docuerim: tamen hactenus aſſequutus non fuerim, quid per vnitatem intelligendum ſit apud Arithmeticos: quippe vbique conatus ſum inculcare, quod vnitas in ſenſu concreto intellecta, ſit illa, de qua agunt Arithmetici.

Secundo, ſi numerus eſt vnitatum aggregatum, quandoquidem aliud ſit vnitas, aliud vero ſit vnitatum aggregatum: quæro an vnitas numerus ſit? ſi dici debeat vnitatem non eſſe numerum, non percipio quomodo numero 6 addendo vnitatem, habeatur numerus maior numero 6; etenim poſito quod vnitas numerus non ſit, quando numerus 6 additur vnitas, tunc numero 6 nullus numerus additur: ſed, ſaltem à me, intelligi non poteſt quomodo numerus ſex fiat maior, quando illi nullus numerus additur: adeoque à me intelligi non poteſt, quomodo numerus ſex fiat maior numerus quando illi vnitas additur, ſuppoſito quod vnitas non ſit numerus. Rurſus ſuppoſito quod vnitas numerus non ſit, non percipio quomodo Arithmetici numerorum operationibus annumerent additionem, in qua vnitas vnitati additur: vel vnitas ex vnitate ſubtrahitur; denique his aliiſque ſimilibus dubiis turbatus, vbique in logiſtica doceo vnitatem numerum eſſe; & prima Arithmeticæ fundamenta non percepi, ſi iuxta illa dicendum ſit, vnitatem numerum non eſſe.

Tertio in diuerſis circumſtantiis diuerſa intelligi per numerum Arithmeticum, niſi ego aberro, manifeſtum eſt ex dictis in præcedenti reflexione: idque verum eſſe oſtendimus, etiam ſiſtendo intra terminos vulgaris Arithmeticæ, quæ ab inuicem diſtinguit numeros diuerſæ ſpeciei: hoc eſt eos qui ſimul addi poſſunt, atque in vnam ſummam colligi: ab illis, qui ſimul addi, ſiue in vnam ſummam colligi non poſſunt; ac præterea non confundit numeros inter ſe æquales, cum illis qui inter ſe ſunt inæquales. Quæro igitur in quo loco expoſiti inueniantur ſenſus illi diuerſi, quos admittit vox numerus, in diuerſis circumſtantiis adhibita? Ego certè, etiam apud eos qui ad Euclideam doctrinam ſcriptis annotationibus, vaſta volumina impleuerunt: vix vllum verbum additum inuenio paulo ante hic ex Euclide propoſitę numeri definitioni; adeò aliis clara eſt illa definitio in qua præter tenebras nihil video.

RE-

Digitized by Google

REFLEXIO IV.

Proponuntur aliqua in quibus inter ſe conueniunt, vel ab inuicem differunt, operationes vulgaris Arithmeticæ & Logiſticæ noſtræ. Deinde exponitur quomodo poſteriores operationes, ex anterioribus deriuentur. Denique obiter notatur aliqua differentia inter noſtram Logiſticam, & Algebram.

PRimo. Operationes vulgaris Arithmeticæ, ſubinde quidem per genitores exhibent productum operationis: ſed tamen plerumque aliter quam per genitores exhibent operationis productum. Logiſticæ noſtræ operationes plerumque per genitores exhibent productum operationis: ſubinde tamen aliter quam per genitores exhibent operationis productum. Hæc aſſertio quatuor partes habet: circa ſingulas breuiter noto, vnde conſtet verum eſſe quod aſſeritur. Operationes vulgaris Arithmeticæ ſubinde per genitores exhibere productum operationis: manifeſtum eſt ex prima praxi diuiſionis propoſita capite 5. vt pluribus oſtenſum eſt circa initium præcedentis reflexionis. Operationes vulgaris Arithmeticæ, plerumque aliter quam per genitores exhibere productum operationis: conſtat ex ſuperiorum capitum praxibus; etenim ſi excipiatur prima praxis diuiſionis, reliquæ omnes, aliter quam per genitores exhibent productum operationis. Operationes noſtræ Logiſticæ plerumque per genitores exhibere productum operationis: immediatè patet ex praxibus quas libro primo capite ſecundo noſtræ Logiſticæ aſſerimus, pro additione, multiplicatione, atque diuiſione; etenim in ſingulis illis praxibus nihil aliud docetur, quam operationis genitores, certo modo, atque ordine ſcribendo, per ipſos exhibere productum operationis. Operationes noſtræ Logiſticæ aliquando aliter quam per genitores exhibere productum operationis: conſtat ex praxi quam capite ſecundo libri primi Logiſticæ tradimus, pro ſubtractione: iuxta quam praxim exhibitum ſubtractionis productum, continet quidem datum ſuperiorem genitorem: ſed non continet datum inferiorem genitorem; hic mutato prius ſigno ſcribitur in producto: adeoque in producto Logiſticæ ſubtractionis non exhibetur inferior genitor, ſed numerus, qui ab inferiori dato genitore tantum differt, quantum vnitates poſitiuæ, & negatiuæ, diffe-

Digitized by Google

differunt inter ſe; quare prædicta Logiſticæ noſtræ praxis, aliter quam per genitores exhibet productū ſubtractionis; qua de re paulo poſt recurret ſermo: & plura inuenies capite 9 partis ſecundæ ideæ Logiſticæ. Præterea licet capite ſecundo libri primi Logiſticæ, non aliter quam per genitores doceamus exhibere productum multiplicationis: tamen ſubinde etiam aliter quam per genitores exhibemus aliqua multiplicationis producta. Exempli gratia, ſuppoſito quod genitores dati pro multiplicatione, inter ſe non differant, atque numerus denominatus 1 a 1 duci debeat in ſeipſum: iuxta praxim prædicti ſecundi capitis Logiſticæ, ſcripto 1 a 1 *in* 1 a 1, per genitores exhibebit productum propoſitæ multiplicationis: quod idem productum, ſed non per genitores exhibebit ſcriptio 1 a 2: etenim iuxta dicta in capite primo libri primi Logiſticæ prædictæ duæ ſcriptiones inter ſe æquiualent; atque vtraque exhibet productum ex numero denominato 1 a 1 ducto in ſe: ſed tamen in ſecunda ſcriptione, non repræſentantur genitores propoſitæ multiplicationis: atque adeo hæc ſecunda ſcriptio aliter quam per genitores exhibet productum multiplicationis. Similiter ſcriptio Logiſtica, qua repræſentamus productum ex illa diuiſione, quam radicis extractionem appellamus, aliter quam per genitores repræſentat diuiſionis productum.

Secundo. Numeri producti ex operationibus vulgaris Arithmeticæ plerumque ſunt numeri ſimplices, ſubinde tamen ſunt numeri compoſiti. Numeri producti ex operationibus Logiſticis, ſubinde quidem ſimplices ſunt, plerumque tamen ſunt numeri compoſiti. Rurſus propoſita aſſertio, quatuor partes habet, atque circa ſingulas breuiter noto, quæ ſufficiunt vt intelligatur verum eſſe quod aſſeritur; ſuppono tamen ſimplicis, atque compoſiti numeri definitiones à me propoſitas capite 8. libri 1. Logiſticæ: neque controuerto, an illæ definitiones legitimæ, vel illegitimæ haberi debeant. Ex operationibus vulgaris Arithmeticæ productos numeros plerumque ſimplices eſſe: ſatis conſtat ex ſuperioribus capitibus, in quibus egimus de vulgaris Arithmeticæ operationibus: etenim ſi diuiſionem excipias, non inuenies operationem, per quam ex duobus datis numeris ſimplicibus, producatur alius quam ſimplex numerus. Ex operationibus vulgaris Arithmeticæ productos numeros aliquando compoſitos eſſe; ſatis patet ex dictis de vulgari diuiſione, ex qua non infrequenter producitur numerus compoſitus ex integro, & fracto vulgari numero. Ex operationibus Logiſticis productos numeros plerumque compoſitos eſſe, conſtat ex praxibus additionis, ſubtractionis, & multiplicationis, traditis capite ſecundo li-

do libri primi Logiſticę:etenim iuxta dictas praxes producti numeri omnes compoſiti ſunt. Ex operationibus Logiſticis productos numeros ſubinde ſimplices eſſe: conſtat ex ea diuiſione quæ appellatur radicis extractio, etenim ſcriptio Logiſtica, ſimplicis numeri radicem exhibens repræſentat numerum ſimplicem.

Tertio. Vt vulgaris additio inſtituatur, dati numeri debent eſſe vulgares, atque eiuſdem ſpeciei: vt vulgaris ſubtractio inſtituatur, dati duo numeri debent eſſe vulgares atque eiuſdem ſpeciei, & inſuper datus numerus ſuperior non poteſt eſſe minor dato inferiori numero. Vt inſtituatur vulgaris multiplicatio, aut diuiſio, dati numeri debent eſſe vulgares. Pro quauis logiſtica operatione, ſufficit vt dati numeri ſint Logiſtici. Singulæ partes huius aſſertionis ſatis manifeſtæ ſunt, ex dictis circa ſingulas operationes, de quibus agitur in aſſertione. Quoniam verò nulli numeri poſſibiles ſunt, qui exprimi non poſſint per numeros Logiſticos, & quælibet Logiſticæ operationes inſtitui poſſint circa quoslibet datos numeros Logiſticos: patet operationes Logiſticas tales eſſe, vt inſtitui poſſint circa datos quoſcunque numeros poſſibiles: etiam per datos numeros intelligendo numeros planè incognitos. Ab hac Logiſticarum operationum amplitudine dicuntur operationes vniuerſales: atque hæc ipſa amplitudo, vnica, vel certè plane præcipua cauſa eſt, quare aſſumantur in noſtra Logiſtica.

Quarto. Operationes vulgaris Arithmeticæ non compendiatæ; ſatis immediatè patent ex ipſis operationum definitionibus. Idem verum eſt de ſingulis operationibus Logiſticis quæ proponuntur capite ſecundo libri primi Logiſticæ: ſuppoſita tamen intelligẽtia ſignificationis quam apud nos habent ſigna † & —; quorum ſignorum ſignificatio ſatis fusè declaratur in ſecunda parte appendicis libri ſecundi Logiſticæ. Non omnes quidem, ſed aliquæ vulgaris Arithmeticæ compendiatæ operationes, indigent demonſtratione: immo meo iudicio inter vulgares Arithmeticæ operationes ſuperius à nobis propoſitas, ſola diuiſio fractorum vulgarium numerorum indiget demonſtratione quam inuenies cap. 7. pag. 57. Compendiatas operationes Logiſticas nuſquam proponimus: tradimus tamen varios modos vtiles vt longiores numeri Logiſtici contrahantur, atque reducantur ad alios magis compendiatos prioribus æquiualentes; atque inter praxes pro Logiſticorum numerorum reductionibus à nobis allatas, nihil inuenio, quod videatur demonſtratione indigere, præter illud, quod circa ſigna † & — præſcribitur, quando duo numeri Logiſtici particula *in*, vel *per* connexi ad vnum numerũ reducũtur. Hoc demõſtratũ inuenies in parte ſecũda ideæ Logiſticę pag. 62.

Pro

Digitized by Google

Pro deriuatione Logiſticarum operationum ex vulgari Arithmetica, conſideranda eſt praxis prima diuiſionis vulgaris propoſita capite 5. in hac praxi vulgaris Arithmeticæ, exhibetur productum diuiſionis per ipſos genitores, ſcriptos certo modo, ſiue ordine: etenim nihil aliud docet, quam numero diuidendo interpoſita lineola ſubſcribere diuiſorem, atque hac ſcriptione exhibere productum diuiſionis; hæc praxis non tantum vtilis eſt, quando diuiſor eſt maior numero diuidendo: ſed etiam in quouis alio caſu: dummodo non curetur ſcriptio breuiſſima, atque clariſſima: ſed ſufficiat ſcriptio compendiata, atque vſitata in vulgari Arithmetica. Hinc patet iuxta vulgaris Arithmeticæ præcepta paſſim vſitata, cuiuſcunque vulgaris diuiſionis productum legitime repræſentari poſſe, per datos duos diuiſionis genitores. Ex hac praxi Arithmeticæ vulgaris deriuantur vniuerſales Logiſticæ noſtræ operationes, capite ſecundo libri primi Logiſticæ propoſitæ, pro additione, multiplicatione, atque illa diuiſione, in qua datur vterque genitor diuiſionis; etenim imitando illud quod in prædicta praxi docet vulgaris Arithmetica, docet noſtra Logiſtica, per genitores certo modo ſcriptos exhibere productum additionis, multiplicationis, & diuiſionis. Harum trium operationum inſinuata deriuatio, talis videri poterat, quæ vlteriori declaratione non indigeret; placet tamen ſingulas ſeorſim proponere, incipiendo à diuiſione, vt additioni immediate ſuccedat ſubtractio, quæ per genitores non exhibet productum.

Pro logiſtica diuiſione, in qua vterque genitor proponitur, atque repræſentatur logiſtica ſcriptione compendiata: retinemus eamdem illam praxim capite 5 propoſitam, quæque pro vulgarium numerorum diuiſione vſitata eſt: atque docemus diuiſionis productum exhibere per ſcriptionem, in qua numero diuidendo interpoſita lineola ſubſcriptus ſit diuiſor; circa hanc praxim, vel potius praxeos vſum, inter Logiſticam, & vulgarem Arithmeticam alia differentia non intercedit, quam quod vulgaris Arithmetica hac praxi non vtatur, niſi circa numeros vulgares compendiate ſcriptos. Logiſtica vtatur eadem praxi, circa quoslibet numeros logiſtica ſcriptione compendiatè repræſentatos. Prædictæ praxi logiſticæ diuiſionis: alteram addimus: in qua numero diuidendo ſucceſſiuè adſcribimus, diuiſorem, interpoſita tamen particula *per*, quæ compendiate ſignificat idem, ac ſi ſcriberetur, *diuiſum per*.: Quam parum hac ſecunda praxis à priori differat, nemo non videt: immo vtriuſque praxis ſcriptiones plane idem ſignificare, ſatis conſtat ex dictis capite 6. quandoquidem idem ſignificent ſequentes lo-

quutiones, nimirum, duæ tertiæ, & duo diuiſum per tria. Secundam diuiſionis Logiſticæ praxim, priori addimus, propter ſolam commoditatem: quæ præcipuus, vel fortè vnicus finis eſt, propter quem compendiatæ ſcriptiones aſſumuntur, aut à vulgari Arithmetica, aut à Logiſtica. Iam verò, ſubinde ſatis commodum non eſt, in eadem linea repræſentare vnum numerum alteri ſubſcriptum, interpoſita lineola: immo quia hoc modo commodè typis exhiberi non poterant fracti vulgares numeri, propemodum vbique omiſſa eſt lineola ſeparans fracti numeri numeratorem, à denominatore: vt monuimus pag. 28. Præterea, ſaltem magis moleſtum non eſt per particulam *per*, intelligere voces *diuiſum per*: quam eaſdem voces intelligere, per lineolam ſeparantem duos numeros, quorum vnus alteri ſubſcriptus ſit. Hæc ſufficient pro deriuatione Logiſticæ diuiſionis, in qua datur vterque genitor diuiſionis. Deriuatio illius diuiſionis, in qua non datur niſi numerus diuidendus, quæque radicis extractio dicitur: expoſitione non indiget; ſiquidem præter ſimplicem radicalium numerorum ſcriptionem nihil contineat: atque in tertia reflexione ſatis multa dicta ſint de origine ſcriptionis, qua in logiſtica noſtra repræſentantur numeri radicales.

Praxis pro logiſtica multiplicatione propoſita capite ſecundo libri primi logiſticæ: proximè ſimilis eſt praxi diuiſionis; etenim quemadmodum pro diuiſione aſſumitur particula *per*, quæ æquiualeat vocibus *diuiſum per*: ſic pro multiplicatione aſſumitur particula *in*, quæ æquiualet vocibus *ductum in*. Præterea, quemadmodum particula *per*, interpoſita inter duos genitores, ſignificat genitorem qui particulam *per* præcedit, diuiſum per genitorem qui ſubſequitur: ita particula *in*, interpoſita inter duos genitores, ſignificat anteriorem genitorem ductum in poſteriorem; quare non minus manifeſtum eſt, quomodo vulgaris Arithmeticæ ſcriptiones, imitetur ea ſcriptio, qua multiplicationem logiſticam abſoluimus, quam altera qua abſoluimus Logiſticam diuiſionem, de qua paulò ante egimus.

Pro deriuatione illius ſcriptionis, qua abſoluimus Logiſticam additionem aduertendum apud eos qui vtuntur vulgari Arithmetica, familiariſſimum eſſe: Exempli gratia, lineola interpoſita ſucceſſiue ſcribere duos numeros vulgares, quorum prior ſcuta, alter iulios ſignificat: in quo caſu lineola ſeperans duos numeros, alioquin ſucceſſiuè ſcriptos, æquiualet his vocibus *& inſuper*, vel vocibus *ſimul cum*, aut aliis ſimilibus. Exempla huiuſmodi ſcriptionum, inuenies, in omnibus propemodum mercatorum libris, in quibus congeruntur notæ, acceptæ, aut datæ pecuniæ: vel etiam

mer-

Digitized by Google

mercium acceptarum aut venditarum: Similia exempla paſſim inuenies, apud eos, qui tradunt vulgarem practicam Arithmeticam vbi agunt de additione aut ſubtractione numerorum diuerſæ ſpeciei: atque adeo dici non debet nouum in vulgari Arithmetica, aſſumere lineolam connectentem duos numeros ſucceſſiue ſcriptos, vt æquiualeat vocibus *ſimul cum*; hunc maxime communem vſum imitando, ſtatuimus in noſtra Logiſtica, vt ſigna † & — (quibuſcunque tandem vocibus exprimantur) interpoſita inter duos numeros ſucceſſiuè ſcriptos, æquiualeant his vocibus *ſimul cum*; atque adeo ſignificent, numerum ante ſignum illud ſcriptum, ſumptum ſimul cum numero ſcripto poſt ſignum. Iam vero in hac lege propoſita in appendice lib. 2. Logiſticæ, atque vt patet deriuata ex vſu in vulgari Arithmetica maximè familiari, conſiſtit tota praxis additionis logiſticæ: pro qua aliud non præſcribitur, niſi vt numeri dati pro additione cum ſuis ſignis ſucceſſiuè ſcribantur: etenim eo ipſo quod ſucceſſiuè cum ſuis ſignis ſcripti ſint duo numeri, prior cum poſteriore ſigno † vel — connectitur, & ſignificatur prior ſimul cum poſteriore. Quemadmodum verò prior diuiſus per poſteriorem ſignificat productum diuiſionis: & prior ductus in poſteriorem ſignificat productum multiplicationis: ita etiam prior ſimul cum poſteriore ſignificat productum additionis.

Pro deriuatione illius praxis, quã in Logiſtica tradimus pro ſubtractione: in memoriam reuocanda ſunt, quæ in præcedenti reflexione diximus de numeris poſitiuis & negatiuis; nimirùm ſemper haberi æquales, vel eiuſdem valoris numeros: ſiue numero A addatur poſitiuus numerus B; ſiue ex numero A, ſubtrahatur negatiuus numerus B; qualeſcunque numeros repræſentent litteræ A & B; atque ſimiliter ſemper æquales, vel eiuſdem valoris numeros haberi, ſiue numero A addatur numerus negatiuus B: ſiue ex numero A ſubtrahatur numerus poſitiuus B. Quod cum veriſſimum ſit, atque ſatis manifeſtum, ex ipſo conceptu numerorum, quos appellamus poſitiuos & negatiuos: etiam manifeſtum eſt, quomodo in ipſa Logiſtica additione accedente ſola ſigni mutatione (per quam numerus ex poſitiuo fit negatiuus, vel ex negatiuo fit poſitiuus) habeatùr aliquid planè æquiualens ſubtractioni. Quandoquidem igitur Additio Logiſtica deriuetur ex vulgari Arithmetica, vt iam oſtendimus: & inſuper ex eadem vulgari Arithmetica deriuentur numeri noſtri poſitiui & negatiui, vt dictum eſt in præcedenti reflexione: ſatis patet quomodo ex vulgari Arithmetica originem habeat, quod vt ita dicam reſultat ex additione Logiſtica, atque numeris

noſtris poſitiuis & negatiuis; ta'e verò eſt illud, quod in Logiſtica præſcribitur pro ſubtractione, ſiue Logiſticæ noſtræ ſubtractio, in qua præſcribitur, vt in numero ſubtrahendo mutetur ſignum, ac deinde addatur alteri numero, ex quo ſubtractus repræſentari debet; etenim duorum numerorum additio, accedente vnius ſigni mutatione, planè æquiualet ſubtractioni, in qua ſubtrahitur numerus cuius ſignum mutatur; vt paulo ante hic notauimus.

Breuiter hic expoſuimus, quomodo ex vulgari Arithmetica deriuata ſit Logiſticæ noſtræ ſubtractio, propoſita capite ſecundo lib. 1. Logiſticæ. Operæ pretium videtur, notare alium modum, quo ex vulgari Arithmetica deriuari poterat ſubtractio planè diuerſa ab illa quam adhibemus: ſed tamen non diuerſa quoad ipſam ſcriptionem. Integrum nobis erat aſſumere ſignum †, vt compendiate repræſentaret vocem plus: & ſignũ — aſſumere vt compendiate repræſentaret vocem minus: atque inſuper ſtatuere, vt duæ illæ voces ſignis † vel — repræſentatæ retinerent eamdem ſignificationem, quam habent ad longum ſcriptæ. Quo poſito, quemadmodum in vulgari Arithmetica, 4 plus 3, per genitores indicat productum additionis, & ſimiliter, 4 minus 3, per genitores indicat productum ſubtractionis: ita etiam ſcriptio, 4 † 3, per genitores ſignificaſſet productum additionis: & ſcriptio, 4 — 3, per genitores ſignificaſſet productum ſubtractionis; & conſequenter, quemadmodum in vulgari Arithmetica 4 minus 7 eſt aliquid impoſſibile, ſiue chimæricum: etiam concedendum erat 4 — 7, eſſe aliquid impoſſibile ſiue chimæricum: atque adeo vel huiuſmodi ſcriptio admittenda non erat, vel certe admittendi erant numeri chimærici, atque ipſo nihilo minores. Niſi fallor, modo hic inſinuato, ex vulgari Arithmetica deriuantur ſcriptiones, in quibus ſignis † & — vtuntur Algebræ ſcriptores: quandoquidem admittant numeros ipſo niholo minores, vt ipſi met expreſſe fatentur, & multis exponunt iſtos numeros chimæricos, atque illorum vtilitatem extollunt. Hos numeros chimæricos, atque ipſo nihilo minores non admittit noſtra Logiſtica: quemadmodum non admittit vltimo loco propoſitam deriuationem ſcriptionum, in quibus ſigna † & — adhibentur; quare, tametſi Algebræ, & Logiſticæ noſtræ communia ſint ſigna † & —: & etiam voces plus & minus, quibus ſigna iſta enuntiantur: tamen inter Algebram & Logiſticam noſtram intercedit maxima differentia, dependens ab ipſis ſignis † & —: ſiquidem in Logiſtica noſtra habeant ſignificationem, planè diuerſam à ſignificatione quam habent in Algebra. Etenim, ſcriptio, 4 — 7, tam in Algebra, quàm in Logiſtica, legitur quatuor minus ſeptem: verum in Algebra ſigni-

gnificat idem,ac ſi diceretur,productum ex ſeptem vnitatibus poſitiuis,ſublatis ex quatuor vnitatibus poſitiuis.In Logiſtica noſtra ſignificat idem,ac ſi diceretur,quatuor vnitates Poſitiuæ ſimul cũ ſeptem vnitatibus negatiuis. Quandoquidē igitur maxime differant inter ſe duæ propoſitiones, quarum prima ſit,productũ ex ſeptem vnitatibus poſitiuis ſublatis ex quatuor vnitatibus poſitiuis: ſecunda ſit,productum ex quatuor vnitatibus poſitiuis ſumptis ſimul cum ſeptem vnitatibus negatiuis: manifeſtum eſt ſcriptionem, 4 — 7, planè diuerſa ſignificare,in Algebra, & Logiſtica noſtra:licet vtrobique enuntietur per eaſdem voces,quatuor minus ſeptem.Quanta ſit,prædictarũ duarum propoſitionum diuerſitas melius intelliges, ſi aduertas: primo, primam propoſitionem per genitores indicare productum ſubtractionis: ſecundam propoſitionem per genitores indicare productum additionis. Secundo,primam propoſitionem non agere de vnitatibus negatiuis: ſecundam agere de vnitatibus negatiuis. Tertio, primam propoſitionem indicare productum ex ſubtractione impoſſibili in vulgari Arithmetica: ſecundam indicare productum ex additione poſſibili in vulgari Arithmetica. Quarto, primam propoſitionem indicare numerum chimæricum, atque ipſo nihilo minorem, & planè incognitum in vulgari Arithmetica: ſecundam propoſitionem indicare numerum, verum, realem, ac paſſim cognitum in vulgari Arithmetica.

Hæc obiter notare volui, vt appareat, quantum à veritate aberrent, qui ſtatuunt, meam logiſticam Algebram eſſe ex eo capite, quod tam in mea Logiſtica, quam in Algebra, ſigna † & —, in ſcriptione adhibeantur, atque iiſdem vocibus enuntientur. Certè ſi huiuſmodi, vel temerarij, vel parum prudentes iudices, ſaltem voces intelligerent, tum in Logiſtica, tum in Algebra vſitatas: potius oppoſitum ſtatuerent: nimirum Logiſtcam noſtram Algebram non eſſe: quandoquidem in mea Logiſtica, & Algebra, etiam iiſdem ſcriptionibus, & vocibus planè diuerſa ſignificentur. Cæterum non nego me Algebram ſcripſiſſe, quandoquidem enim nunquam inuenire potuerim eius definitionem, non ſatis ſcio quid ſit Algebra. Præterea quod pro mea Logiſtica nihil deſumpſerim ex Algebra, alia cauſa non eſt, quam quod Algebræ proprium nihil inuenerim, quod mihi arrideret: aut conueniret tenuitati ingenij mei; neque per hoc aliquid derogatur excellentiæ ipſius Algebræ: quæ pro ſe habet tot doctiſſimorum hominum ſuffragia vt pro meis lucubrationibus, vel ex ipſo titulo non vulgare ornamentum ſperare poteram, ſi inſcribi potuiſſent, Algebra ſpecioſa. Verum

malui

malui tam ſpecioſo ornamento carere apud indoctos: quam à doctioribus merito reprehendi, quod cum titulo opuſculū non conueniret.

Notare hæc volui, etenim Logiſticæ ſtudioſo, maximè proderunt, quando aliquem ex tripode pronuntiantem audiet, me Algebram ſcripſiſſe; vt inferat huiuſmodi Apollinem, ne quidem aſſequutum terminos vſitatos in Algebra, atque noſtra Logiſtica. Ex hoc deorum genere inueniuntur plures: atque adhuc nuperrime nactus ſum in Mathematicis inſtructorem aliquem: nomen ſcire non potui: ſi nomen ſcirem, tamen hic prætermitterem: neque enim nominare conſueui, quos laudare non poſſum: ſolam veritatem propugnare contendo, cui non aduerſantur, aut nomina aut perſonæ, ſed falſæ, atque erroneæ aſſertiones: his veritatis hoſtibus tantummodo infenſus ſum, atque contrarius. Prædictus meus inſtructor per varias manus ad me ſcriptum miſit, præferens hoc exordium. *Nimio me honore dignatus es vir exime, cum mihi Logiſticam miſiſti N. N. cui nullum Mathematicum problema inſolubile: exquirens inſuper meum de illa iudicium &c.* His præmiſſis, vaticinia incipit Apollo, iam nunc præſagus quid ſubſequi debeat priores Logiſticæ libros Deinde aſſignat mihi authores quos legere debeam, vt intelligam, quam præſtantem vſum habeant numeri chimærici, nihilo minores: imaginaria numerorum latera &c. Poterat has merces diſtrahere apud Poëtas, quid mihi cum fabulis? inſtat tamen, hæc adhiberi in Algebra: quodque in Belgio, & Gallia idem ſignificet Logiſtica, & Algebra: Grammatico dignum argumentum! pro ſe citare poterat Lexicon, aut Calepinum, ſi vox Algebra illic fuiſſet annotata; miſerum me ſi legiſſet poſtremas lineas appendicis libri ſecundi Logiſticæ: vbi monui, voces plus, & minus, correſpondentes ſignis † & —, non ſignificare illud, quod ſignificant apud Grammaticos, quod idem hic paulo ante annotaui: atque addidi, in noſtra Logiſtica, & aliorum Algebra, habere diuerſam ſignificationem: quod qui non percipit, certè vel in Logiſtica, vel in Algebra maximè vſitatos terminos, non aſſequitur; optarem, vt hæc altiſſimè inhærerent diſcenti noſtram Logiſticam, vt quando audiet aliquos pronuntiantes, Logiſticam noſtram Algebram eſſe, neque ignorantum more hæſitabundus, pronuntiatis acquieſcat: neque etiam grammaticorum more, de ſola voce inſtituat litem: ſed inquirat, quid per Algebram intelligant; an ſcilicet de illa Algebra ſermo ſit, quæ admittit, atque aſſumit chimæras: vt ſunt numeri nihilo minores: imaginaria numerorum latera: plures quam tres quantitatis dimenſiones: proportio æqualitatis nihilo comparata, atque adeo non admiſſa inter proportiones, quem-

ad-

admodum nihil non admittitur inter numeros; hoc (vt ita dicam) proportionis nihilo aliæ proportiones minores &c. Certè qui ſtatuit huiuſmodi Algebram conuenire cum noſtra Logiſtica, prima Logiſticæ noſtræ principia non percepit. Si verò per Algebram nihil intelligant, niſi antiquiorem Arithmeticam, atque Geometriam aliquantulum ampliatam, independenter ab omni ſubſidio deſumpto à chimæricis quantitatibus, aut proportionibus, falſo non aſſerit noſtram Logiſticam eſſe Algebram: Sed tamen hoc caſu, vox Algebra, erit æquiuoca: atque non minus verum erit Logiſticam noſtram non eſſe Algebram, quam Logiſticam noſtram eſſe Algebram, certum enim eſt inueniri opera in quibus priori ſenſu Algebra intelligitur: an ſimiliter opera inueniantur, in quibus poſteriori ſenſu intelligitur Algebra, ſtatuant alij: priori tantum ſenſu intelligendo Algebram, omnino falſum exiſtimo, Logiſticam noſtram Algebram eſſe. An Logiſtica noſtra Algebram aſſequatur, aut ſuperet, vel certè illi poſtponenda ſit: non eſt meum ſtatuere; non vulgari laude dignam eſſe Algebram vltro concedo: tamen vt alibi dixi apparatum eius omni ex parte non approbo.

REFLEXIO V.

Singula, quæ libro primo noſtræ Logiſticæ circa numeros logiſticos traduntur, in capitibus quæ ſecundum ſequuntur, atque octauum præcedunt: vel circa numeros vulgares vſitata ſunt in vulgari Arithmetica, vel ex his deriuantur.

HAec reflexio amplectitur conſiderationem plurimorum capitum libri primi noſtræ Logiſticæ: de ſingulis enim pauca notanda ſunt.

Primo. Propoſitis duobus numeris vulgaribus eiuſdem ſpeciei, inuenire vnum numerum qui duobus iſtis numeris: ſimul ſumptis æquiualeat, ſiue æqualis ſit; vſitatum eſt in vulgari Arithmetica: hoc enim eſt quod docet additio vulgaris. Similiter prima pars capitis tertij noſtræ Logiſticæ, tradit praxim inueniendi vnum numerum qui ſit æqualis, ſiue æquiualens, duobus aut pluribus numeris logiſticis inter ſe ſimilibus. In hac praxi nihil traditur, quod ſatis immediatè non pateat, aut ex ipſa intelligentia logiſticorum numerorum, aut ex vulgari additione, aut ſubtractione.

Secun-

Secundo. Quemadmodum in vulgaris Arithmeticæ multiplicatione, docetur modus inueniendi vnum numerum, exhibentem productum, quod oritur ex duobus numeris vulgaribus ſimul multiplicatis: ita etiam pars ſecunda capitis tertij noſtræ Logiſticæ, proponit praxim, qua inueniri poteſt vnus numerus, exhibens productum, quod oritur ex duobus numeris Logiſticis ſimul multiplicatis. In hac praxi duo traduntur: quorum primum eſt, noui numeratoris inuentio; ſecundum eſt, inuentio ſigni quo nouus numerator affici debet. Primum nihil requirit præter vulgarem multiplicationem: atque adeo nullam difficultatem annexam habet. Alterum neque immediatè patet ex intelligentia Logiſticorum numerorum, neque ex vulgari Arithmetica. In vulgari Arithmetica; debita multiplicata per debita, producunt debita; quandoquidem igitur à nobis numeri negatiui debitis comparentur, conformiter ad vulgarem Arithmeticam numerus negatiuus ductus in numerum negatiuum, deberet producere numerum negatiuum: & tamen prædicto loco ſtatuitur, Logiſticæ noſtræ numerum negatiuum ductum in alium numerum negatiuum, producere numerum poſitiuum; cur hoc verum ſit, non ſatis immediatè apparet ex ipſa intelligentia numerorum qui à nobis appellantur poſitiui, aut negatiui; atque eodem modo non ſatis apparet, quare duo numeri, quorum vnus poſitiuus alter negatiuus eſt ſimul multiplicati, ſemper producant numerum negatiuum: neque producere poſſint numerum poſitiuum. Huius rei demonſtrationem inuenies in idea logiſticæ pagina 62.

Tertio. In tertia parte capitis tertii Logiſticæ proponitur praxis, continens modum inueniendi vnum numerum, qui ſit productum ex diuiſione inſtituta circa duos numeros Logiſticos: omnino reſpondens praxi traditæ in ſecunda parte eiuſdem capitis; atque vtrique praxi commune eſt, quod præſcribitur circa ſignum, quo affici debet productum; alterum in quo differunt prædictæ iſtæ praxes, difficultatem annexam non habet: quemadmodum enim in priori adhibetur vulgaris multiplicatio, ita in poſteriori adhibetur vulgaris diuiſio. Quoniam verò in vulgari Arithmetica paſſim propoſita diuiſio non ſufficit, vt inueniatur productum, Exempli gratia, ex numero 24 plus 12 diuiſo per 4 plus 2, niſi prius diuiſor ex duobus numeris conſtans reducatur ad vnum numerum: monui, præſcripta in dicta praxi non ſufficere, vt facilè abſoluatur propoſita diuiſio. Cæterum citra prædictam diuiſoris reductionem, propoſitam diuiſionem abſoluere: non excedit limites Arithmeticæ vulgaris. Etenim inquirendo, Exempli gratia, quoties maior ex duobus diuiſo-

Digitized by Google

uiſoris numeris; nimirum 4, contineatur in maiori ex duobus numeris diuidendis, nimirum in numero 24: inuenietur aliquis numerus, qui in propoſito caſu erit 6; iam verò, ſi inuentus numerus ductus in totum diuiſorem, auferri poſſit, ex toto numero diuidendo: & tamen non relinquat reſiduum æquale, vel maius, toto diuiſore: inuentus numerus, cum reſiduo inuento ipſi adſcripto, vt docetur in diuiſione vulgari, conſtituet productum quæſitum; ſi inuentus numerus, ductus in totum diuiſorem, auferri non poſſit ex toto numero diuidendo: erit maior producto quæſito; ſi auferri poſſit, ſed relinquat reſiduum æquale, vel maius, toto diuiſore: erit minor producto quæſito. Sic in caſu propoſito, quia 4 continetur ſexies in numero 24, & 6 ductum in 4 dat 24: atque inſuper 6 ductum in 2 dat 12: & denique 24 plus 12 auferri poteſt ex 24 plus 12, neque vllum relinquit reſiduum; 24 plus 12 diuiſum per 4 plus 2, producit 6. Similiter, ſi numerus 28 plus 13 diuidendus ſit per 4 plus 2: quia 4 continetur ſexies in numero 28: & 6 ductum in 4 dat 24: atque inſuper, 6 ductum in 2 dat 12: & denique, 24 plus 12 auferri poteſt ex 28 plus 13, ſic vt reſiduum ſit 5: verum erit, numerum 28 plus 13 diuiſum per 4 plus 2 producere $6 \frac{5}{4 \text{ plus } 2}$ hoc eſt $6 \frac{5}{6}$. Singula hæc, ſatis immediate inferuntur ex dictis de vulgari diuiſione: quia tamen in vulgari Arithmetica partiam planè vtilitatem habent, expreſsè non proponuntur: atque hic tantum propoſita ſunt, vt conſtet, vulgaris Arithmeticæ limites non excedere prædictas diuiſiones, abſque reductione diuiſoris compoſiti ex duobus numeris vulgaribus.

Quarto. In quarta parte capitis tertij nihil aliud requiritur, quam inuentio cuiuſuis radicis, propoſiti vulgaris numeri, qui talem radicem habeat: neque nouum eſt in vulgari Arithmetica, inuenire propoſiti vulgaris numeri radicem, quam nos primam vel ſecundam appellamus: quare ſuppoſito quod vulgaris Arithmeticæ ſcriptores, expreſsè non doceant, niſi vulgaris numeri eam radicem inuenire, quæ à nobis prima aut ſecunda dicitur: adhuc verum erit, quod in hac quarta parte capitis tertij, vel etiam in appendice libri primi Logiſticæ, non proponamus niſi vulgarem Arithmeticam, aliquantulum ampliatam.

Quinto. In quinta parte capitis tertij, nihil vt ita dicam noui proponitur: ſed tantum notatur, quomodo per ea quæ continentur præcedentibus eiuſdem capitis partibus, contrahi poſſint longiores Logiſticæ ſcriptiones: atque inueniri, numerus minus compoſitus, æquiualens alteri magis compoſito.

Sexto. In quarto capite libri primi, proponitur Antitheſis, quæ nihil aliud docet, quam ex vna æquationis parte, mutato ſigno, transferre numerum, ad partem oppoſitam. Iam verò, ex ipſa intelligentia numerorum, quos poſitiuos, aut negatiuos appellamus: ſatis conſtat, vnum numerum ſub contrario ſigno alteri addere: æquiualenter idem eſſe, ac numerum cuius ſignum mutatur, ab altero auferre; (qua de re, ſatis multa dicta ſunt in præcedenti reflexione, quando egimus de Logiſtica ſubtractione) ex quo patet, in Antitheſi, æquiualenter, ab æqualibus æqualia auferri, vt iterum habeantur æqualia. An forte nouum eſt in vulgari Arithmetica, à duobus numeris inter ſe æqualibus, æquales numeros auferendo, inuenire duos alios numeros inter ſe æquales? praxis, qua hoc fit in vulgari Arithmetica, non aliter differt à praxi, qua idem fit in Antitheſi: quam ſubtractio vſitata in vulgari Arithmetica, differt à ſubtractione Logiſtica, vt ſatis conſtat ex iis quæ circa Logiſticam ſubtractionem notauimus in præcedenti reflexione.

Septimo. In quinto capite libri primi, traditur, quomodo per ea, quæ tertio aut quarto capite proponuntur, longiores ſcriptiones Logiſticæ, reduci poſſint ad magis compendiatas, atque prioribus æquiualentes: atque adeo in hoc quinto capite nihil proponitur nouum, atque diuerſum ab iis, quæ traduntur præcedentibus capitibus; ſed tantum notatur aliqua commoditas, reſultans ex iis, quæ prius tradita ſunt.

Octauo. Si rectè conſideres, quæ traduntur capite ſexto aut ſeptimo libri primi, nihil propemodum inuenies, niſi vſum regulæ aureæ, maxime notum in vulgari Arithmetica: præſuppoſita tamen ſcriptionum Logiſticarum notitia; vel certè cum ipſa regula aurea adhibitas aliquas praxes capitum præcedentium.

Quæ hactenus annotauimus, mihi videntur ſufficere, vt conſtet, in tertio, quarto, quinto, ſexto, & ſeptimo capite, libri primi Logiſticæ, tradita circa numeros Logiſticos, in vulgari Arithmetica vſitata eſſe circa numeros vulgares: aut ex his deriuari.

Circa octauum caput libri primi Logiſticæ nihil occurrit notatu dignum, continet enim definitiones, aut alia aliqua principia noſtræ Logiſticæ.

R E-

REFLEXIO VI.

Regula Logiſticæ, nihil continet, quod in vulgari Arithmetica vſitatum non ſit, circa numeros vulgares: atque hinc ſatis manifeſtum eſt, quomodo deriuetur ex vulgari Arithmetica.

QVemadmodum operationes Logiſticæ, differunt ab operationibus vulgaris Arithmeticæ: ita propemodum Logiſticæ regula, differt ab ijs, quæ maximè vſitata ſunt in vulgari Arithmetica. In Logiſticis operationibus, fiunt circa numeros Logiſticos: quæ vulgaris Arithmetica docet circa numeros vulgares; pari modo, quod in Logiſticæ regula præſcribitur circa numeros Logiſticos: in vulgari Arithmetica vſitatum eſt circa vulgares numeros. Vt hoc conſtet, prius conſidero ſingulas partes regulæ Logiſticæ; deinde totum ordinem quem præſcribit hæc regula; etenim, ſi neque in partibus, neque in ordine quo partes ſibi ſuccedunt, aliquid inueniatur, quod circa vulgares numeros vſitatum non ſit apud eos, qui vtuntur vulgari Arithmetica: etiam conſtabit quomodo Logiſticæ noſtræ regula, deriuata ſit ex vulgari Arithmetica.

Primum Logiſticæ noſtræ regulæ præſcriptum eſt: vt obſeruetur aliquis numerus, ex cuius cognitione dependeat ſolutio quæſtionis, quæ proponitur. An forte apud eos, qui vulgari Arithmetica vtuntur, nouum eſt, conſiderando quæſtionem propoſitam, reflectere, ex quo dependeat eius ſolutio? Si Arithmetico proponatur numerus indicans 120 Iulios, reducendus ad numerum æquiualentem, atque indicantem Scuta; vel petatur, quot Scuta conſtituant 120 Iulij; non facilè inuenies aliquem tam rudem, qui ſtatim conſiderando propoſitam quæſtionem, non aduertet, ipſi ſciendum eſſe, quot Iulij æquiualeant vni Scuto: ac petat hoc ſibi indicari, ſi fortè neſciat 10 Iulios æquiualere vni Scuto. Igitur nouum non eſt in vulgari Arithmetica, conſiderando propoſitam quæſtionem, reflectere ad aliquem numerum, ex cuius cognitione inferri poteſt quæſtionis ſolutio: qualis numerus, in propoſito exemplo, eſt numerus 10 Iuliorum vni Scuto æquiualens.

Secundum Logiſticæ noſtræ regulæ præſcriptum eſt: vt quæſtionis propoſitum exercendo per numerum aſſumptum, inueniatur æquatio, &c. Quid hoc præſcripto magis commune in ea vulgaris Arithmeticæ regula, quæ falſi regula appellatur? In hac regula per

M 2 aſſum-

aſſumptum vulgarem numerum, quæſtionis propoſitum exercetur: idque in hunc finem, vt inueniatur numerus, qui propoſito ac cognito alicui numero æqualis ſit; quod cum ignorare non poſſit aliquis, qui practicam vulgarem Arithmeticam didicerit vlteriori expoſitione non indiget.

Tertium Logiſticæ noſtræ regulæ præſcriptum eſt: vt æquatio minus ſimplex, aut commoda, reducatur ad aliam magis ſimplicem, aut commodam. Quid aliud ſit, quando Exempli gratia in vnam ſummam colliguntur plures numeri Scutorum, Iuliorum, &c ſeparatim ſcripti? Etenim plura minora credita addere, atque in vnam ſummam colligere, aliud non eſt, quam æquationem conſiſtentem inter totum creditum, & plures minores numeros, reuocare ad ſimpliciorem, atque commodiorem æquationem, conſiſtentem inter to um creditum & vnum numerum illud indicantem.

Quartum Logiſticæ noſtræ regulæ præſcriptum eſt: vt inuenta ſimplicior æquatio reſoluatur, &c. Ex æquatione conſiſtente inter 20 Iulios & 2 Scuta, inuenire quot Scutis æquentur, ſiue æquiu aleant 120 Iulij: eſt reſoluere priorem æquationem, Similiter pro ſimplicium æquationum reſolutione, quæ in Logiſticæ regula præſcribitur: nihil requiritur niſi regula aurea maxime vſitata in vulgari Arithmetica, quare in vulgari Arithmetica omni ex parte nouum dici non poteſt, quod præſcribitur in quarta parte regulæ Logiſticæ.

Ex his abunde conſtat, in nulla parte regulæ Logiſticæ præſcribi aliquid, quod vſitatum non ſit in Arithmetica vulgari. Reliquum eſt vt videamus, vtrum ex partibus ſimul poſitis reſultans, vt ita dicam tota regula, conſtituat complexum aliquod incognitum vulgari Arithmeticæ. In quem finem, placet hic proponere eamdem quæſtionem, quæ pro exemplo regulæ affertur in noſtra Logiſtica.

Quæſtio hæc eſt. *Vrbis præſidium milites continet, quorum numerus ignoratur, hoc tamen ſcitur, quod ſi præſidium tertia ſui parte augeretur, & inſuper centum accederent, haberet milites* 3000.

Quæſtio propoſita ſolui poteſt hoc diſcurſu. Facta hypotheſi, quod tertia pars præſidij ſint 10 milites: ergo totum præſidium erunt 30 milites; ergo 30 plus 10 æquantur 3000 minus 100: ergo 40 æquatur 2900; inuenta hac ſimplici æquatione, falſa tamen, eam reſoluo dicendo, 40 producitur ex numero 10: numerus 2900 ex quo producitur? Vel, inuenio 40 milites, ſupponendo tertiam præſidij partem eſſe 10 milites: vt inueniam 2900 milites, quot milites debent contineri tertia parte præſidij? Inſtituendo regulam auream, inuenio 725; ex quo infero; ergo tertia pars præſidij,

ſunt

ſunt 725 milites: adeoque totum præſidium ſunt 2175 milites.

Ego mihi perſuadeo, propoſitum diſcurſum nihil prorſus continere, quod ſuperet captum eorum, qui modice verſati ſunt in vulgari Arithmetica: cuius limitibus continentur longe difficiliora; immo totus diſcurſus nihil continet, præter falſi regulam, in forma Syllogiſtica propoſitam.

Si propoſitum hic diſcurſum, conferas cum diſcurſibus quibus cap. 9 libri primi Logiſticæ, infertur ſolutio propoſitæ quæſtionis: facile aduertes, vtrobique eodem modo obſeruari Logiſticæ regulam: immo vix inuenies differentiam, quæ aliunde reſultet, quam ex numeris Logiſticis aut vulgaribus; priores enim illic adhibentur, hic verò non adhibentur niſi vulgares numeri: Plura requiri non exiſtimo, vt intelligatur, diſcurſus ordinem, qui in Logiſticæ regula præſcribitur, nihil continere, quod ſuperet vſum vulgaris Arithmeticæ.

Quandoquidem ex ijs, quæ hactenus breuiter propoſuimus, conſtet, neque in vlla parte regulæ Logiſticæ, neque in ordine quo partes ſibi ſuccedunt, aliquid inueniri, quod in vulgari Arithmetica nouum ſit, atque diuerſum à ſcriptionibus, aut numeris aſſumptis in noſtra Logiſtica; ſatis manifeſtum eſt, vnde originem habeat; immo, non regulæ Logiſticæ, ſed potius Logiſticæ numeris, atque compendiatis ſcriptionibus,deberi ſingula,in quibus vulgaris Arithmeticæ vſum, ſuperat vſus Arithmeticæ traditæ in Logiſtica; quidquid enim in duplici illa Arithmetica, diuerſum eſt à compendiatis ſcriptionibus, aut quæ ex huiuſmodi ſcriptionibus reſultant: vtrique arbitror commune.

Quod in Logiſticæ regula præſcribitur, nihil aliud eſt, quam ordo diſcurſus, qui ſæpè commodus eſt, pro ſolutione problematum, atque ijs præſcribitur qui recenter accedunt ad Logiſticam. Partes regulæ Logiſticæ, ſubinde omnes, ſubinde tantum aliquæ vtiles ſunt: quemadmodum in regula aurea præſcriptæ partes, ſubinde omnes, ſubinde tantum aliquæ vtiles ſunt; Exempli gratia, in regula aurea præſcribitur multiplicatio, & diuiſio, tamen inutilis eſt diuiſio, ſi ex datis tribus numeris, primus, eſt vnitas ſimplex; pari modo inutilis eſt multiplicatio, ſi ex datis tribus numeris, ſecundus vel tertius eſt vnitas ſimplex. Rurſus licet in regula aurea abſolutè præſcribatur, vt prius ſecundus numerus per tertium multiplicetur, ac deinde productum diuidatur per primum numerum: illud tamen neceſſario obſeruandum non eſſe, patet ex ijs, quæ capite 8 notauimus: illic enim duos alios modos indicauimus, quibus inſtitui poteſt regula aurea. Pari modo tametſi ſæpè commodus ſit

totus

totus ordo præſcriptus in regula Logiſticæ, non ideo illicitum eſt ab hoc ordine recedere; immo quoties immediate, aut magis commode haberi poteſt æquatio, ad quam ordinantur priores regulæ partes: planè inutiliter adhiberentur: verùm quemadmodum huius generis monita negliguntur à ſcriptoribus Arithmeticæ vulgaris, ita etiam negliguntur in noſtra Logiſtica.

REFLEXIO VII.

Ex propoſitis deriuationibus præcipuarum ſcriptionum noſtræ Logiſticæ, facilè infertur, reliquarum ſcriptionum deriuatio. Præterea licèt præcipua differentia, quæ inuenitur inter vulgarem & Logiſticæ noſtræ Arithmeticam practicam, vel conſiſtat in compendiatis ſcriptionibus, vel ex illis reſultet: atque adeo parua videri poſſit differentia inter vulgarem & Logiſticæ noſtræ Arithmeticam practicam; tamen parua non eſt Logiſticæ noſtræ vtilitas: quæ in parua, vt ita dicam, ſcriptionum diuerſitate fundata eſt.

PRæcipua omnia quæ pertinent ad compendiatam ſcriptionem noſtræ Logiſticæ, propoſita ſunt in ſuperioribus reflexionibus: in quibus nihil dictum eſt, de charactere =, qui compendiate repræſentat vocem *æquatur*, vel vocem *æquiualet*; vel de charactere ≐, qui compendiate repræſentat voces *quod etiam æquatur*, ſiue, *quod etiam æquiualet*; vel de charactere, o, quando compendiate repræſentat vocem *oppoſitum*; vel de paucis alijs eiuſmodi characteribus; quandoquidem enim oſteſum ſit, in vulgari Arithmetica nullo modo nouum eſſe, ſed communi vſu receptum, aut lineolas, aut alios characteres aſſumere, quibus compendiate voces repræſententur: ſatis manifeſtum eſt, quomodo noſtra Logiſtica vulgarem Arithmeticam imitetur, in ſingulis illis characteribus, quos tantum aſſumit, vt compendiate repræſentet aliquas voces, quas compendiate repræſentare commodum eſt: vel quia frequenter recurrunt, vel quia ad longum ſcriptæ, cauſant aliquam moleſtiam, ſiue minorem commoditatem; quoniam verò, tales videntur characteres aſſumpti in noſtra Logiſtica, de quibus non egimus in præcedentibus reflexionibus: etiam ſuperfluum exiſtimo, pluribus exponere, quomodo deriuentur ex vulgari Arithmetica.

Si re-

Si recte conſideres præcipua illa capita in prima reflexione propoſita, quibus diximus contineri, tum vulgaris, tum etiam Logiſticæ noſtræ Arithmeticam practicam: atque his addas, quæ in ſecunda reflexione dicta ſunt, de conuenientia, atque differentia numerorum qui conſiderantur in vtraque iſta Arithmetica: non difficulter inferes, præcipuam differentiam quæ inuenitur inter vulgarem & Logiſticæ noſtræ Arithmeticam practicam, haberi à compendiatis ſcriptionibus; quod ſi nobis ipſis fatentibus verum eſt, facile aliquis ſuſpicari poſſet, atque inferre: ex tam parua differentia, magni momenti vtilitatem naſci, aut reſultare non poſſe: quid hinc vlterius ſequatur, nemo non videt. Verum ne ex erronea eiuſmodi præmiſſa aliquis inferat, erroneas concluſiones, nobis contrarias: rogo vt meminerit, ex parua ſcintilla contempta maximum naſci poſſe incendium. Ex leui errore in principijs, ſequi poſſe falſitates maxime enormes. Totius Arithmeticæ atque Geometriæ principia, pauca eſſe, & vt ita dicam ſatis contemptibilia, & obuia: tamen quam pulchræ, quam vtiles, quam ſublimes, atque ab aliorum cognitione maximè remotæ veritates, ſolis Arithmeticis atque Geometris cognitæ, atque ex prædictis principijs deductæ inueniuntur? Practica Arithmetica vulgaris, decem notas aſſumit, vt compendiate repræſentet numeros: tolle has notas, & euertes vniuerſam, vt ita dicam, vulgarem Arithmeticam practicam: quandoquidem, non tantum moleſtum, verum etiam propemodum impoſſibile fit, vulgaris Arithmeticæ operationes ac regulas inſtituere, circa numeros, qui neque planè parui ſint, neque compendiatis ſcriptionibus repræſententur; quare ſi ex paucis compendiatis ſcriptionibus aſſumptis pro vulgari Arithmetica practica, reſultet tota eius vtilitas, quam prudens nemo negare poteſt maximam eſſe: etiam paucæ aliæ compendiatæ ſcriptiones, aſſumptæ in noſtra Logiſtica, atque additæ vulgaris Arithmeticæ compendiatis ſcriptionibus: tales eſſe poſſunt, ex quibus reſultet vtilitas: tantum, aut etiam longe amplius ſuperans, vulgaris Arithmeticæ vtilitatem: quantum, omnes Logiſticæ noſtræ ſcriptiones compendiatæ, ſiue characteres, ſuperant decem vulgaris Arithmeticæ characteres, ipſi etiam Logiſticæ communes. Verum huius loci non eſt pluribus agere de vtilitate, aut practicæ, aut ſpeculatiuæ noſtræ Logiſticæ; de qua vt aliquid inſinuem: ſuppono aliud eſſe Mathematicas veritates memoriter tenere, atque illarum ſenſum aſſequi: aliud verò eſſe, aſſequi quomodo Mathematicæ veritates cohęreant cum principijs, aut ex illis legitime deducantur: ſed tamen non minus primum, quam ſecundum ſufficere, vt aliquis dicatur intelligere Matheſim,

aut

aut Mathematicas veritates; quo ſuppoſito, habemus duos modos intelligendi Mathematicas veritates, ſiue duplicem Matheſeos intelligentiam; prior Matheſeos intelligentia ſufficit pro Hiſtorico: poſterior requiri videtur pro Mathematico; iam verò agendo de poſteriori illa Matheſeos intelligentia, quæ altera longo interuallo ſuperior eſt; eo tempore quo auditores mei, ſcriptam à me Logiſticam adhibuerunt: paſſim expertus ſum, paucorum menſium ſtudio in Arithmeticæ, Geometriæ, atque vniuerſæ Matheſeos intelligentia, maiorem progreſſum: quam aut ego fecerim, aut ab alijs fieri viderim, ſpatio plurium annorum. Hoc ſi verum eſt: de vtilitate noſtræ Logiſticæ ſatis multa, paucis indicaui. Quod verum ſit, adductis rationibus non aliter probari poteſt, quam reliquæ veritates quæ experientia diſcuntur. Quare, illi qui mihi fidem denegat, aliud replicare non poſſum, niſi, veni & vide. Si tamen aliquis paulo attentiùs perlegat noſtræ Logiſticæ Ideam, prius ſpeculatiuè, ac deinde practicè declaratam: fortaſſis, abſque alia experientia, non difficulter mihi præſtabit fidem. Nemo enim, vt opinor, ignorat: in qualibet ſcientia, maximum compendium afferre, pro pluribus concluſionibus magis reſtrictis, ſubſtituere vnam magis vniuerſalem, quæ reſtrictiores omnes ſimul amplectatur ſua amplitudine: atque ita plurima, paucis complecti. Quandoquidem igitur Logiſtica noſtra, huiuſmodi compendia ſubminiſtret, in veritatibus ad Matheſim ſpectantibus: nemo non videt, ex hoc capite maximum compendium reſultare poſſe in rebus Mathematicis. Deinde, ſi nihil ſit quod in ſcientijs maiorem claritatem afferat, quam remotis æquiuocationibus, clarè expoſita habere principia, quibus vtitur talis ſcientia: conſiderando, quod plurima Matheſeos principia, apud alios, aut neglecta, aut male expoſita, aut æquiuocationibus implicata: à nobis clare exponantur; vnuſquiſque facile concludet, nos non parum intelligibilitatis, ac luminis afferre rebus Mathematicis. Omitto cætera, quæ melius intelligi poterunt ex conſcripta à nobis Logiſticæ noſtræ Idea; etenim præcipuum ferè lumen, quod viua voce affero diſcentibus noſtram Logiſticam, dependet à duobus capitibus hic inſinuatis; ex primo, breuitas: ex altero, claritas reſultat; denique ex breuitate compoſita cum claritate, reſultare poſſe paulo ante annotatam Logiſticæ noſtræ vtilitatem, non videtur difficulter credibile. Quoniam verò inter Matheſeos principia numerantur definitiones, ſiue expoſitiones terminorum: atque ab ipſa expoſitione terminorum reluceat lumen, quod viua vox, affert meis auditoribus: mirandum non eſt, præter tenebras propemodum nihil videre in noſtra Logiſtica, qui illam conſiderant,

derant , neglecta terminorum expoſitione quæ à nobis affertur : atque terminis quibus vtimur , eam ſignificationem attribuunt , quam ipſi ſomniantur : ex quo fit quod de Logiſtica noſtra ſomniantibus proportionata proferant iudicia; verum quid huiuſmodi ſomniatores ſtatuant parum laboro ; ſi vigilantior aliquis aduerterit me alicubi in errorem incidiſſe , moneri deſidero , vt corrigam errorem meum : etenim in ſcribendo vltimus finis mihi propoſitus, alius non eſt , quam pro viribus prodeſſe quam plurimis .

Ad maiorem Dei gloriam .

APPENDIX

IN QVA

Luditur in numeris.

ARGVMENTVM.

PRactica Arithmetica, non aliter melius diſcitur, quam exercitio : hoc eſt , frequenter inſtituendo Arithmeticas operationes ; huic exercitio annexus labor , magna ex parte ſubleuatur , atque imminuitur , quando curioſitate alliciente ſuſcipitur . Quamobrem , tradita Arithmeticæ practica , addo ludos aliquos , pro quibus requiruntur diuerſæ operationes Arithmeticæ , etenim Arithmeticæ candidati , examinando an in diuerſis numeris ſemper vniformis ſit ludorum ſucceſſus , non minus vtiliter , ſed fortaſſis minori tædio exercebuntur in operationibus Arithmeticis , quam ſi occupentur circa numeros , caſu tantum , vel exercitij gratia propoſitos . Non tamen ſine vllo delectu quoslibet ludos Arithmeticos propono , ſed tantum aliquos , ad indicatum finem , deductos ex primo vel ſecundo vniuerſali theoremate , propoſito pagina 89. noſtræ Logiſtica : vel certe ex conceptu diui-

ſionis, aut ex regula aurea. Ex ludis pro tyronibus propoſitis, pergo ad aliquas quæſtiones, ex ipſis ludis natas: ſed fortaſſis potius annumerandas maximè ſerijs Arithmeticorum conſiderationibus, quam candidatorum ludis. Denique pro quæſtionum reſolutionibus requiſita aliqua theoremata, propono, ac demonſtro: modo tamen, ſiue ſtylo vſitato in noſtra Logiſtica:

Pro ludis Arithmeticis, prius exhibeo quinque diuerſas praxes, alphabeti litteris ſubſcribendi vulgares numeros: deinde expono ludos circa ſcriptos numeros. Vbique aduertendum eſt, quod exempli gratia, per numerum A, intelligi debeat numerus litteræ A ſubſcriptus: ſiue numerus quem ex vi hypotheſis ſignificat littera A: quodque ſimiliter per numeros B, C, D, &c. intelligendi ſint numeri, iſtis litteris ſubſcripti: vel ex vi hypotheſis ſignificati per tales litteras. Deinde quod per priores alphabeti litteras, repræſentem numeros qui incogniti ſupponuntur, illi, qui ludum proponit: eidem cogniti numeri repræſentantur per poſteriores alphabeti litteras.

Praxis prima.

PRimo. Litteris A & B, ſingulis, pro libitu numerus aliquis ſubſcribatur. Secundo numeri A & B addantur, atque productum ſubſcribatur litteræ C. Tertio numerorum A & B minor à maiori ſubtrahatur, & productum ſubſcribatur litteræ D. Quarto numeri C & D addantur, & productum ſubſcribatur litteræ E. Quinto numerorum C & D minor à maiori ſubtrahatur, & productum ſubſcribatur litteræ F.

A	B
3	7
C	D
10	4
E	F
14	6

Exemplum numerorum ſcriptorum iuxta primam praxim, hic appoſitum habes: in hoc exemplo ſupponitur quod placuerit litteræ A ſubſcribere numerum 3: & litteræ B, placuerit ſubſcribere numerum 7. Ludi qui ſupponunt numeros ſcriptos iuxta hanc primam praxim, deriuantur ex theoremate primo vniuerſali, quod in noſtra Logiſtica proponitur pagina 89: atque ad numeros reſtrictum, aſſerit, quod qualeſcunque ſint numeri A & B, atque differentia numerorum A & B, ſit D: aggregatum vero numerorum A & B, ſit C: tunc numerorum A & B maiorem æquari aggregato ex dimidio D & dimidio C; verum numerorum A & B, minorem æquari differentiæ dimidij D, & dimidij C.

Pra-

Digitized by Google

Praxis ſecunda.

PRimo. Litteræ A, pro libitu quiuis numerus ſubſcribatur, maior tamen quam ſit numerus X: quem numerum X ſibi pro ſibitu aſſumit, qui alteri præſcribit ordinem, quo ſingulis litteris numeros debet ſubſcribere, atque adeo præſcribenti cognitus ſupponitur. Secundo, numerus X addatur numero A, & productum ſubſcribatur litteræ B. Tertio, numerus X ſubtrahatur ex numero A, vel numerus A ſubtrahatur à numero X, & productum ſubſcribatur litteræ C. Quarto, numerus B addatur numero C, & productum ſubſcribatur litteræ D.

Exemplum habes hic appoſitum, in quo ſupponitur placuiſſe litteræ A ſubſcribere numerum 16; atque præſcribenti cognitum numerum X, eſſe 6. Ludi qui ſupponunt numeros ſcriptos iuxta hanc praxim, deriuantur ex eodem theoremate, ex quo diximus deriuari ludos, qui ſupponunt numeros ſcriptos iuxta primam praxim.

A	
16	
B	C
22	10
D	
32	
X	
6	

Praxis tertia.

PRimo. Litteræ A ſubſcribatur quiuis numerus pro libitu. Secundo, duplum numeri A, ſubſcribatur litteræ B. Tertio, triplum numeri A, ſubſcribatur litteræ C. Quarto, numerus B, addatur numero C, & productum ſubſcribatur litteræ D.

Exemplum appoſitum, ſupponit, placuiſſe litteræ A ſubſcribere numerum 13. Ludi in quibus ſupponuntur numeri ſcripti iuxta hanc praxim deriuantur ex conceptu diuiſionis, vt indicatur ad ſubſequentem praxim, in qua paulo vniuerſalius proponitur, quod hic magis reſtrictum eſt.

A	
13	
B	
26	
C	D
39	65

Praxis quarta.

PRimo. Litteræ A, quiuis numerus ſubſcribatur; atque à præſcribente aſſumantur quiuis duo numeri, quorum vnum hic ap-

Digitized by Google

pello X, alterum Z. Secundo numerus A ducatur in numerum X, atque productum ſubſcribatur litteræ B. Tertio numerus A ducatur in Z, atque productum ſubſcribatur litteræ C. Quarto numerus B addatur numero C, atque productum ſubſcribatur litteræ D.

Habes appoſitum exemplum, in quo placuit litteræ A ſubſcribere 7; atque pro numero X aſſumere 4; denique pro numero Z aſſumere 9. Ludi in quibus ſupponuntur numeri ſcripti iuxta hanc praxim, deriuantur ex conceptu diuiſionis: ex quo conceptu, ſatis patet, quod qualeſcunque ſint numeri A, X, Z, atque A *in* X † Z = C † B: etiam C † B *per* X † Z = A: & præterea C † B *per* A = X † Z.

A	
7	
B	D
28	91
C	
63	
X	Z
4	9

Praxis quinta.

PRimo. Litteræ A, ſubſcribatur quilibet numerus, maior tamen numero X, aſſumpto à præſcribente. Secundo numero A addatur numerus X, & productum ſubſcribatur litteræ B. Tertio numerus A ducatur in numerum X, & productum ſubſcribatur litteræ C. Quarto numerus B ducatur in numerum B, & productum ſubſcribatur litteræ D. Quinto numerus C ducatur in numerum 4, & productum ſubſcribatur litteræ E. Sexto numerorum D & E minor à maiori auferatur, & productum ſubſcribatur litteræ F. Septimo inueniatur radix prima numeri F, atque ſubſcribatur litteræ G.

In appoſito exemplo, ſupponitur, placuiſſe litteræ A ſubſcribere 7 & à præſcribente, per numerum X intelligi 3. Ludi in quibus ſupponitur ſcriptio hic propoſita, deriuantur ex theoremate ſecundo, quod in noſtra Logiſtica proponitur pagina 89. In hoc theoremate docetur, qualeſcunque ſint numeri, quorum maior A minor X: atque inſuper X † A = B: & etiam X *in* A = C; neceſſario verum eſſe, quod A — X = 1 R 1 * B 2 — 4 C.

A	
7	
B	C
10	21
D	E
100	84
F	G
16	4
X	
3	

Pri-

Digitized by Google

Primus ludus Arithmeticus.

In quo ex indicato vno alteroue ex ſcriptis numeris, inuenio alios.

PRimo. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta primam praxim, ſi mihi indices numeros E & F, ſumendo ſingulorum iſtorum numerorum dimidium habebo duos alios numeros A & B. Sic quia in exemplo appoſito primæ praxi, numerus E eſt 14, eius dimidium erit 7, ſiue numerus B; & quia numerus F erat 6, eius dimidium eſt 3, ſiue numerus A.

Secundo. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta ſecundam praxim, ſi mihi indices numerum D, ſumendo eius dimidium inuenio numerum A. In exemplo ſecundæ praxis numerus D eſt 32, ſumendo eius dimidium habetur numerus A, qui eſt 16.

Tertio. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta tertiam praxim, ſi mihi indices numerum D, hunc diuidendo per numerum 5, inuenio numerum A. In exemplo tertiæ praxis, numerus D eſt 65, quem diuidendo per 5, inuenitur numerus A, qui eſt 13.

Quarto. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta quartam praxim, ſi mihi indices numerum D, hunc numerum diuidendo per aggregatum numerorum X & Z (qui numeri ſinguli ſupponuntur mihi cogniti) inuenio numerum A. In exemplo quartæ praxis numerus D eſt 91: & quia X eſt 4, atque inſuper Z eſt 9, aggregatum X & Z erit 13: denique 91 diuidendo per 13, inuenitur numerus A, qui eſt 7.

Quinto. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta quintam praxim, ſi mihi indices numerum G, illi addendo numerum X (qui ſupponitur mihi cognitus) inuenio numerum A. In exemplo quintæ praxeos numerus G eſt 4, cui addendo numerum X qui eſt 3, habetur numerus A, qui eſt 7.

Secun-

Secundus ludus Arithmeticus.

In quo præſcribo, quid fieri debeat circa numeros iuxta ſuperiores praxes ſcriptos, atque ex alijs aſſumptis numeris productos, vt iterum habeantur aſſumpti numeri.

PRimo. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta primam praxim: aſſero, quod diuidendo ſingulos numeros E & F per numerum 2, inuenies ſingulos numeros A & B. In exemplo primæ praxis numerus E eſt 14, quem diuidendo per 2, habetur numerus B qui eſt 7: præterea numerus F eſt 6, quem diuidendo per 2, habetur numerus A qui eſt 3.

Secundo. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta ſecundam praxim: aſſero, quod diuidendo numerum D, per numerum 2: ſiue ſumendo dimidium numeri D: habebis numerum A. In exemplo ſecundæ praxis numerus D eſt 32, ſumendo eius dimidium, habetur numerus A qui eſt 16.

Tertio. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta tertiam praxim: aſſero, quod numerum D diuidendo per numerum 5: ſiue ſumendo quintam partem numeri D: habebis numerum A. In exemplo tertiæ praxis, numerus D eſt 65: ſumendo huius numeri quintam partem, habetur numerus A qui eſt 13.

Quarto. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta quartam praxim: aſſero, quod diuidendo numerum D per aggregatum numerorum X & Z (qui duo numeri X & Z ſupponuntur mihi cogniti, adeoque illorum aggregatum mihi cognitum eſt, atque illud aſſigno pro diuiſore) inuenietur numerus A. In exemplo quartæ praxis, numerus D eſt 91: aggregatum numerorum X & Z eſt 13: denique numerum 91 diuidendo per numerum 13, habetur numerus A qui eſt 7.

Quinto. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta quintam praxim: aſſero, quod numero G addendo numerum X (qui numerus X mihi cognitus ſupponitur, atque illum aſſigno pro additione) inuenietur numerus A. In exemplo quintæ praxis numerus G eſt 4, cui addendo numerum X qui eſt 3, habetur numerus A qui eſt 7.

Ter-

Tertius ludus Arithmeticus.

In quo præſcribo, quid fieri debeat circa numeros iuxta ſuperiores praxes ſcriptos, vt habeatur aliquis numerus mihi cognitus.

PRimo. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta primam praxim: aſſero, quod diuidendo maiorem ex numeris E & F, per maiorem ex numeris A & B: habebis numerum 2; & ſimiliter diuidendo minorem ex numeris E & F, per minorem ex numeris A & B, inuenies numerum 2. In exemplo primæ praxis, maior ex numeris E & F eſt 14. hunc numerum diuidendo per maiorem ex numeris A & B, qui eſt 7: habetur numerus 2. Similiter minor ex numeris E & F, eſt 6: hunc numerum diuidendo per minorem ex numeris A & B, qui eſt 3: habetur numerus 2.

Secundo ſuppoſitis numeris ſcriptis iuxta ſecundam praxim: aſſero, quod diuidendo numerum D per numerum A, inuenies numerum 2. In exemplo ſecundæ praxis, numerus D eſt 32, quem diuidendo per numerum A qui eſt 16, habetur numerus 2.

Tertio. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta tertiam praxim: aſſero, quod diuidendo numerum D per numerum A, inuenies numerum 5. In exemplo propoſito in tertia praxi, numerus D eſt 65: hunc numerum diuidendo per numerum A qui eſt 13, habetur numerus 5.

Quarto. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta quartam praxim: aſſero, quod diuidendo numerum D per numerum A, inuenies numerum qui eſt aggregatum numerorum X & Z (quod aggregatum mihi cognitum eſt, quandoquidem ſinguli numeri X & Z ſupponantur mihi cogniti: ac propterea aſſignare poſſum quem numerum inuenies) quod aggregatum non in litteris, ſed in numero aſſigno. In exemplo quartæ praxis numerus D eſt 91: quem numerum diuidendo per numerum A qui eſt 7: habetur numerus 13, qui eſt aggregatum numerum X & Z, quandoquidem numerus X ſit 4, & numerus Z ſit 9.

Quinto. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta quintam praxim: aſſero, quod ex numero A ſubtrahendo numerum G, inuenies numerum X (qui numerus X ſupponitur mihi cognitus) atque numerum X non per litteram, ſed per numerum indicando, aſſigno numerum quem inuenies per ſubtractionem. In exemplo quintæ praxis, numerus

Digitized by Google

merus A eſt 7: ex hoc numero ſubtrahendo numerum G qui eſt 4, habetur numerus X qui eſt 3.

Quartus ludus Arithmeticus.

In quo præſcribo, quid fieri debeat circa numeros iuxta ſuperiores praxes ſcriptos, vt habeatur numerus mihi aſſignatus, qualiſcunque ille ſit, exempli gratia numerus 25.

PRimo. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta primam praxim: aſſero, quod maiorem ex numeris E & F diuidendo per maiorem ex numeris A & B inuenies numerum, cui ſi addas 3, atque hoc productum ducas in ſe ipſum, habebis numerum 25. In exemplo primæ praxis maior ex numeris E & F eſt 14: & numerorum A & B maior eſt 7: quare 14 diuidendo per 7 habetur numerus 2: huic numero addendo 3, habetur numerus 5: denique numerum 5 ducendo in numerum 5, habetur numerus 25.

Secundo. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta ſecundam praxim: aſſero, quod numerum D diuidendo per numerum A, inuenies numerum, cui ſi addas 7, atque hoc productum ſubtrahas ex numero 34, habebis numerum 25. In exemplo ſecundæ praxis, numerus D qui eſt 32, diuiſus per numerum A qui eſt 16, producit numerum 2; cui addendo 7 habetur 9: denique ex numero 34 ſubtrahendo numerum 9, habetur numerus 25.

Tertio. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta tertiam praxim: aſſero, quod numerum D diuidendo per numerum A, inuenies numerum, quem ducendo in ſeipſum habebis numerum 25. In exemplo tertiæ praxis, numerus D eſt 65: quem deuidendo per numerum A qui eſt 13, habetur numerus 5: & numerus 5 ductus in numerum 5 producit 25.

Quarto. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta quartam praxim: quodque aggregatum numerorum X & Z mihi cognitum ſit 13: aſſero, quod numerum D diuidendo per numerum A, inuenies numerum, cui addendo 12 habebis numerum 25. In exemplo quartæ praxis, numerus D eſt 91: quem diuidendo per numerum A qui eſt 7, habetur numerus 13: cui addendo numerum 12 inuenitur numerus 25.

Quinto. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta quintam praxim, quodque numerus X mihi cognitus ſit 3: aſſero, quod ex numero A ſubtra-

trahendo numerum G inuenies numerum, cui addendo numerum 22, inuenies numerum 25. In exemplo quintæ praxis numerus A eſt 7, ex hoc numero ſubtrahendo numerum G qui eſt 4, habetur numerus 3, cui addendo 22 habetur numerus 25.

Nota primo. Ludos Arithmeticos parum prodeſſe apud eos, qui ludos non ignorant; deinde magis placere quo minus apparet quomodo fiat quod vident fieri. Hinc tertio ludo quartum addidimus, qui vt ita dicam, quo ad ſubſtantiam, à tertio non differt: ſed ab illo tantum differt, quo ad aliquod condimentum; etenim tam in tertio, quam in quarto ludo, per aliquot operationes inſtitutas circa numeros, ſaltem magna ex parte mihi incognitos, efficio, vt habeatur numerus mihi cognitus; hunc numerum, in tertio ludo immediate indico: atque adeo tertius ludus ſimplicior eſt, & ſi ſæpius repetatur, minus difficulter aduerti poteſt eius fundamentum; verum in quarto ludo vlterius adduntur aliqua, quæ talia ſunt, vt apud eos, qui ludum nouerunt, manifeſtum ſit & quare fiant, & quam diuerſimode fieri poſſint: verum apud eos, qui ludum ignorant, tales tenebras cauſare poſſunt, vt nullam in ludo cohærentiam aduertant: atque adeo ludum reddant magis inperceptibilem, atque gratiorem.

Nota ſecundo. Quemadmodum hic quinque modis diuerſis effeci, vt ex numeris maxima ex parte mihi ignotis, ſemper habeatur idem numerus 25; ita effici poſſe vt habeatur quiuis alius numerus: & quomodo id fieri poſſit, videtur tam manifeſtum, vt vlteriori declaratione non indigeat, etiam apud eos, qui non niſi mediocriter verſati ſunt in vulgari Arithmetica practica: quibus ignotum eſſe non poteſt, quid fieri poſſit circa cognitum aliquem numerum, vt habeatur alius numerus etiam cognitus: etenim præter hoc vnum, nihil in hoc quarto ludo proponitur diuerſum ab ijs, quæ in tertio ludo proponuntur.

Quintus ludus Arithmeticus.

In quo præſcribitur, quid fieri debeat circa numeros iuxta ſuperiores praxes ſcriptos, vt habeatur numerus K, ab alio mente conceptus, atque mihi incognitus.

Primo. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta primam praxim: hæc vlterius præſcribo. Primo, vt minor numerorum E & F, diuidatur per minorem numerorum A & B, atque productum ſubſcribatur litteræ G. Secundo, ego aſſumo aliquem numerum R, exem-

pli gratia 5, & iubeo vt numerus K mente conceptus deuidatur per numerum 5 ſiue R, atque productum ſubſcribatur litteræ H. Tertio vt triplum numeri 5 ſiue R, diuidatur per numerum G, & productum ſubſcribatur litteræ L. Quarto vt numerus H ducatur in numerum L, & productum ſubſcribatur litteræ M. His peractis, aſſero, quod ſi ex numero M auferas tertiam partem, reſiduum erit numerus K, abs te mente conceptus. Pro exemplo ſuppono numeros ſcriptos vt in prima praxi repræſentantur, atque conceptum abs te numerum eſſe 45, His poſitis, numerus G erit 2: item numerus H erit 9: item numerus L erit $7\frac{1}{2}$: item numerus M erit $67\frac{1}{2}$, à quo auferendo tertiam partem, quæ eſt $22\frac{1}{2}$, habetur numerus 45, hoc eſt numerus K.

Secuudo. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta ſecundam praxim, hæc vlterius præſcribo. Primo vt numerus D diuidatur per numerum A, atque hoc productum ſubſcribatur litteræ G. Secundo, ego aſſumo aliquem numerum R, exempli gratia 7, & iubeo vt numerus K mente conceptus, diuidatur per numerum 7 ſiue R, atque productum ſubſcribatur litteræ H. Tertio, vt triplum numeri 7 ſiue R, diuidatur per numerum G, & productum ſubſcribatur litteræ L. Quarto vt numerus H ducatur in numerum L, & productum ſubſcribatur litteræ M. His peractis, aſſero, ſi ex numero M auferas tertiam partem, reſiduum erit numerus K abs te mente conceptus. Pro exemplo ſuppono numeros ſcriptos vt repræſentantur in ſecunda praxi, atque conceptum abs te numerum K eſſe 56. His poſitis, numerus G erit 2: Item numerus H erit 8. item numerus L erit $10\frac{1}{2}$: item numerus M erit 84, à quo auferendo tertiam partem quæ eſt 28, habetur numerus 56, hoc eſt numerus K.

Tertio. ſuppoſitis numeris ſcriptis iuxta tertiam praxim; hæc vlterius præſcribo. Primo, vt numerus D diuidatur per numerum A, atque hoc productum ſubſcribatur litteræ G. Secundo ego aſſumo aliquem numerum R, exempli gratia 7, & iubeo vt numerus G diuidatur per 7 ſiue R, & productum ſubſcribatur litteræ H. Tertio, vt numerus K diuidatur per numerum H, & productum ſubſcribatur litteræ L. His peractis, aſſero, quod numerum H ducendo in numerum L, inuenies numerum K à te mente conceptum. Pro exemplo, ſuppono numeros ſcriptos vt repræſentantur in tertia praxi, atque conceptum numerum K eſſe 30. His poſitis, numerus G erit 5: item numerus H erit $\frac{5}{7}$: item numerus L erit 42: denique numerus H ſiue $\frac{5}{7}$ ducendo in numerum 42, habetur numerus 30. hoc eſt numerus K.

Quar-

Quarto, ſuppoſitis numeris ſcriptis iuxta quartam prixim, hæc vlterius præſcribo. Primo vt numerus D diuidatur per numerum A, atque hoc productum ſubſcribatur litteræ G. Secundò, vt numerus *K* diuidatur per numerum G, atque productum ſubſcribatur litteræ H. Tertio, ego aſſumo aliquem numerum R, exempli gratia *3*, & iubeo vt numerus *H* ducatur in numerum R, atque productum ſubſcribatur litteræ L. Quarto vt numerus G diuidatur per numerum 3 ſiue R, & productum ſubſcribatur litteræ M. His peractis, aſſero, quod numerum L ducendo in numerum M, inuenies numerum *K* à te mente conceptum. Pro exemplo ſuppono numeros ſcriptos vt repræſentantur in quarta praxi, atque conceptum à te numerum *K* eſſe 40. His ſuppoſitis, numerus G erit 13. item numerus H erit 3 $\frac{1}{13}$: item numerus L erit 9 $\frac{3}{13}$: item numerus M erit 4 $\frac{1}{3}$: denique numerum L, hoc eſt 9 $\frac{3}{13}$, ducendo in numerum M hoc eſt 4 $\frac{1}{3}$, inuenies numerum *K* hoc eſt 40.

Quinto. Suppoſitis numeris ſcriptis iuxta quintam praxim, hæc vlterius præſcribo. Primo, vt litteræ G ſubſcribatur idem ille numerus, qui in quinta praxi vocatur G: vel quiuis alius iuxta quintam praxim ſcriptus, aut ex illis vtcunque productus: vel denique quiuis numerus pro libitu aſſumptus. Secundo, vt fiant quæ hic præſcripſimus ſuppoſitis numeris ſcriptis iuxta tertiam, vel quartam praxim: vtrouis enim modo prodibit numerus *K* à te mente conceptus.

Quæ in hoc quinto ludo Arithmetico præſcribuntur dependent à regula aurea, non tamen inſtituta priori modo quo docetur capite 8 huius opuſculi, quemque illic notauimus commodiorem eſſe: ſed à regula aurea inſtitutæ, ſecundo, aut tertio modo inſinuato in ſupra citato capite: vel certe à regula aurea, quæ mediante ſola diuiſione abſoluitur. An alij Arithmetici aduerterint, vel ſola diuiſione, vel ſola multiplicatione in quouis caſu abſolui poſſe regulam auream, prorſus ignoro: apud neminem id notatum inueni; quapropter vtrumque illum modum inſtituendi regulam auream ſub quæſtionis titulo propono; prius tamen pauca aliqua inſinuanda ſunt circa propoſitos ludos Arithmeticos.

Ludus Arithmeticus gratior eſt, quo meliori modo proponitur; inſinuatis ludis Arithmeticis aliunde petita ornamenta addere nolui, tum ne eſſem longior, tum etiam ne videar potius iocari, quam ſerio ludere; ego certe inutiles aut pueriles iocos non apprehendo in ludis propoſitis: etenim vtile dulci miſcendo, diſcentium profectum curare: non eſt pueriliter iocari; iam vero, quo fine ludos

Digitized by Google

Arithmeticos propoſuerim, ſatis inſinuaui initio huius appendicis. Deinde ipſos ludos, legitimo diſcurſu deducere ex fontibus ex quibus deriuantur, tam facile non eſt, vt poſt mediocrem profectum dedeceat ſpeculatiuæ Arithmeticæ ſtudioſum. Præterea me non parum iuuant, vt commode, & plures ſimul, etiam aliquo modo inuitos traham ad examen, ex quo mihi ſufficienter conſtet, quantum profecerint in practica Arithmetica; modum in vnico exemplo inſinuo. Exempli gratia, pronuntio, quod ſi ex pluribus præſentibus ſinguli ſcribant numerum pro libitu, mihi ignotum: atque circa ſcriptum numerum inſtituant paucas operationes à me præſcribendas: effecturum me, vt ſinguli (tametſi diuerſum numerum ſcripſerint) habeant eumdem, atque mihi cognitum numerum. Vel certe effecturum me, vt apud ſingulos vltimæ operationis productum, ſit ille numerus, quem me inſcio ſubſcripſerint litteræ *K*. Quando huiuſmodi propoſitiones audiuntur, curioſitas inuitat ad exprimentum; & paucos inuenies, qui nolint experientia diſcere veritatem: quam dum volunt experiri, nihil ſimile ſuſpicantes, ſeſe ſiſtunt examini. Si prioris propoſitionis veritas probanda eſt, quartum ludum adhibeo; pro poſteriori propoſitione adhibeo quintum ludum: atque ex diuerſis modis quos ſinguli ludi admittunt, illum eligo, qui requirit operationes circa quas volo inſtituere examen. Denique, ſi dicant me aberraſſe, certo concludo ipſos neſcire præſcriptas operationes; ſi dicant me non aberraſſe, conſtat mihi, præſcriptas à me operationes legitime ab ipſis inſtitutas eſſe.

Paulo ſuperius monuimus, quintum ludum hic propoſitum, deriuari ex regula aurea, de qua agitur capite 8 huius opuſculi: vbi affertur triplex modus diuerſus inueniendi numerum, quem per hanc regulam inquiri diximus; in ſingulis tamen modis præſcribitur multiplicatio, & diuiſio: atque ab his modis inſtituendi regulam auream, diuerſus eſt aliquis modus, qui adhibetur in quinto ludo: quandoquidem non præſcribat multiplicationem. Hinc naſcitur argumentum ſubſequentium quæſtionum, in quibus inquiritur, an ſola multiplicatio, vel ſola diuiſio ſufficiat, tum pro regula aurea circa propoſitos quoslibet numeros inſtituenda: tum etiam pro regula aurea, inſtituenda in caſu in quo aliquis ex datis tribus numeris eſt vnitas: quo caſu non differt à duabus poſtremis operationibus Arithmeticis, quarum altera multiplicatio, altera diuiſio dicitur. Prædictis quæſtionibus, addo alteram, prioribus affinem, eo ex capite, quod ad eius intelligentiam requiratur diſtinctio, quæ intercedit inter diuiſionem, de qua agit Arithmetica, quando docet numerum in partes diuidere: & diuiſionem, de qua agit Geometria, quando docet lineam rectam

diui-

diuidere in partes. His quæſtionibus accedunt theoremata quibus innituntur quæſtionum ſolutiones.

Quæſtio I.

Quomodo ex datis quibuslibet tribus numeris vulgaribus, inueniri poſsit quartus proportionalis, mediante ſola diuiſione.

SOlutio. Ex datis tribus numeris primus diuidatur per ſecundum, vel per tertium numerum: atque per productum ex hac diuiſione, diuidatur reliquus numerus. Sic enim producetur quartus proportionalis quæſitus, & per ſolam diuiſionem abſoluetur regula aurea.

Exempli gratia, primus numerus ſit 12. Secundus numerus ſit 3. Tertius numerus ſit 20. Primum numerum 12, diuidendo per ſecundum numerum 3: habetur numerus 4. Deinde, tertium numerum 20, diuidendo per inuentum numerum 4: habetur numerus 5; qui eſt quartus proportionalis quæſitus. Rurſus primum numerum 12, diuidendo per tertium numerum 20: habetur numerus $\frac{12}{20}$. Deinde ſecundũ numerum 3, diuidendo per inuentum numerum $\frac{12}{20}$: habetur numerus 5; qui eſt quartus proportionalis quæſitus. Solutionem in quolibet caſu legitimam eſſe, conſtat ex primo theoremate mox proponendo.

Quæſtio II.

Quomodo ex datis quibuslibet tribus numeris vulgaribus, inueniri poſsit quartus numerus proportionalis, mediante ſola multiplicatione.

SOlutio. Primo, aſſumatur numerus cuius numerator ſit vnitas, denominator vero ſit primus numerus propoſitus; quomodo hoc commode fiat, quando primus datus numerus fractus eſt, dicitur in nota. Deinde aſſumptus numerus ducatur in ſecundum datum numerum. Denique hoc productum ducatur in tertium datum numerum. Sic enim habebitur quartus proportionalis quæſitus.

Nota. Scriptione vſitata in vulgari Arithmetica, exhibere numerum

merum cuius numerator ſit vnitas, denominator vero ſit propoſitus numerus: commodum eſt, quando propoſitus numerus eſt vulgaris integer: etenim hoc caſu, ſufficit, interpoſita lineola vnitati ſubſcribere propoſitum numerum; idem tamen ita commodum non eſt, quando propoſitus numerus eſt vulgaris fractus; quia interpoſita lineola vnitati fractionem ſubſcribere, vſitatum non eſt in vulgari Arithmetica; vt hoc fiat praxi vſitata in noſtra Logiſtica, poteſt interpoſita lineola vnitati ſubſcribi fractio, repræſentata mediante particula *per*; verum hæc ſcriptio non facit ad præſentem caſum, in quo agimus cum illis, qui tantum didicerunt vulgarem Arithmeticam, aut non vtuntur, niſi ſcriptionibus vſitatis in vulgari Arithmetica. Vt huiuſmodi ſcriptione, ſaltem æquiualenter, & commodè exprimatur numerus, cuius numerator ſit vnitas, denominator vero ſit propoſitus fractus numerus vulgaris: ſufficit propoſitum fractum numerum inuertendo, efficere, vt eius numerator fiat denominator, & viciſſim eius denominator fiat numerator. Exempli gratia, ſuppoſitus numerus ſit $\frac{3}{8}$ atque repræſentari debeat numerus cuius numerator ſit vnitas, denominator vero ſit propoſitus numerus: ſcribendo $\frac{8}{3}$, ſaltem æquiualenter, habebis intentum. Aliter ſcriptionem Logiſticam adhibendo, ſcribi poſſet $\frac{1}{3 \text{ per } 8}$, vel certe 1 *ſed per* 3 *per* 8; tres enim poſtremæ ſcriptiones, inter ſe æquales numeros indicant.

Pro exemplo propoſitæ ſolutionis. Primus numerus ſit 12. Secundus numerus ſit 3. Tertius numerus ſit 20. Itaque aſſumptus numerus erit $\frac{1}{12}$; hic numerus ductus in 3, producit $\frac{1}{4}$, denique hoc productum ducendo in numerum 20, habetur numerus 5. qui eſt quartus proportionalis quæſitus. Rurſus, primus numerus ſit $\frac{3}{8}$. Secundus numerus ſit 4. Tertius numerus ſit 6. Itaque aſſumptus numerus erit $\frac{8}{3}$; hic numerus ductus in 4 producit $10\frac{2}{3}$; denique hoc productum ducendo in numerum 6, habetur numerus 64; qui eſt quartus proportionalis quæſitus. Solutionem vniuerſaliter veram eſſe conſtabit ex ſecundo ſubſequenti theoremate.

Quæſtio III.

Quomodo inueniri poſſit productum diuiſionis, mediante ſola multiplicatione.

SOlutio. Aſſumatur numerus, in quo numerator ſit vnitas: & denominator, ſit diuiſor datus pro diuiſione; quomodo hoc commo-

commode fieri poſſit, quando diuiſor datus eſt fractus numerus; dicitur in nota præcedentis quæſtionis. Deinde aſſumptus numerus ducatur in numerum diuidendum. Sic enim habebitur productum ex propoſita diuiſione.

Exempli gratia, numerus 12 diuidendus ſit per numerum 4. Aſſumptus numerus erit $\frac{1}{4}$; hunc numerum ducendo in numerum 12, habetur numerus 3, qui idem numerus producitur, quando 12 diuiditur per 4. Rurſus numerus 12 diuidendus ſit per numerum $\frac{3}{5}$. Aſſumptus numerus erit $\frac{5}{3}$, hunc numerum ducendo in numerum 12, habetur numerus 20; qui idem numerus habetur quando 12 diuiditur per $\frac{3}{5}$. Solutionem vniuerſaliter veram eſſe, conſtabit ex ſubſequenti tertio theoremate.

Quæſtio IV.

Quomodo inueniri poſsit productum multiplicationis, mediante ſola diuiſione.

Solutio. Aſſumatur numerus in quo numerator ſit vnitas, denominator vero ſit vnus ex duobus numeris datis pro multiplicatione; de quo agitur in nota ſecundæ quæſtionis. Deinde alter numerus datus pro multiplicatione, diuidatur per aſſumptum numerum. Sic enim habebitur productum propoſitæ multiplicationis.

Exempli gratia, numerus 3 ducendus ſit in numerum 4. Aſſumptus numerus erit $\frac{1}{3}$, vel certe $\frac{1}{4}$: liberum enim eſt quemuis ex his duobus numeris aſſumere. Deinde numerum 4, diuidendo per $\frac{1}{3}$, habetur 12; & ſimiliter numerum 3, diuidendo per $\frac{1}{4}$, habetur 12; qui idem numerus 12 habetur, quando numerus 3 ducitur in numerum 4. Rurſus, numerus 6 ducendus ſit in $\frac{2}{3}$. Aſſumptus numerus erit $\frac{1}{6}$, vel certe $\frac{3}{2}$. Deinde $\frac{2}{3}$ diuidendo per $\frac{1}{6}$, habetur numerus 4; & etiam numerum 6 diuidendo per $\frac{3}{2}$, habetur numerus 4; qui idem numerus 4 habetur, quando numerus 6 ducitur in $\frac{2}{3}$. Solutionem vniuerſaliter veram eſſe, docet ſubſequens quartum theorema.

Quæ-

Quæſtio V.

An omnium numerorum poſsibilium minimus ſit vnitas.

IVxta noſtras definitiones, etiam vnitas nnmerus eſt: quo ſuppoſito, quæro vtrum impoſſibilis ſit aliqua quantitas diſcreta, ſiue aliquis numerus, minor vnitate: atque adeo omnium numerorum minimus ſit vnitas, vel certe poſſibilis ſit aliqua quantitas diſcreta, ſiue aliquis numerus, minor vnitate: atque adeo omnium numerorum minimus non ſit vnitas. Prius pro vtraque parte affero vnum alterumue argumentum. Deinde ſtatuo quid dicendum ſit ad propoſitam quæſtionem. Denique reſpondeo ad argumenta nobis contraria, atque prius allata. Singula perlegendo, intelliges, quid propoſita quæſtio, commune habeat cum præcedentibus quæſtionibus, in quibus egimus de regula aurea, vel certe de multiplicatione atque diuiſione, quas duas operationes, regulæ aureæ, veluti compendia eſſe, ſuo loco monuimus.

Omnium numerorum minimum eſſe vnitatem, ſuadere poſſunt ſubſequentia duo argumenta.

Primo. Quantitas diſcreta eſt ſubiectum habens terminationem; maior quantitas diſcreta, eſt ſubiectum habens plures terminationes: minor quantitas diſcreta, eſt ſubiectum habens pauciores terminationes: atqui impoſſibile eſt ſubiectum habens terminationes pauciores quam vnam: ergo omnium diſcretarum quantitatum poſſibilium, minor eſt illa, quæ habet vnicam terminationem: ſed quantitas diſcreta habens vnicam terminationem, appellatur vnitas: ergo omnium poſſibilium quantitatum diſcretarum, minor, ſiue minima, eſt vnitas: atqui omnis numerus eſt quantitas diſcreta: ergo omnium poſſibilium numerorum; minor, ſiue minimus, eſt vnitas.

Secundo. Omnes numeri indicant indiuidua, vnum ſcilicet, vel plura: & maior numerus dicitur, qui indicat plura indiuidua: minor numerus dicitur, qui indicat pauciora indiuidua: atqui manifeſtum eſt, indicari non poſſe indiuidua pauciora quam vnum: ergo impoſſibilis eſt numerus, minor illo, qui indicat vnicum indiuiduum: ſed numerus indicans vnicum indiuiduum, eſt vnitas: ergo impoſſibilis eſt numerus minor vnitate: ergo omnium poſſibilium numerorum, minimus, eſt vnitas.

Omni-

Omnium numerorum minimum non eſſe vnitatem, ſuadere poſſunt ſubſequentia duo argumenta.

Primo. Vnum dimidium, eſt numerus minor vnitate. Similiter duæ tertiæ, duæ quartæ, tres quintæ, &c. ſunt numeri minores vnitate: ergo dantur numeri minores vnitate; ergo omnium numerorum poſſibilium minimus non eſt vnitas.

Secundo. Ex eo quod quælibet recta linea poteſt diuidi, in duas, tres, quatuor, & quotlibet partes, æquales inter ſe, quæque ſingulæ ſint rectæ lineæ: legitimè ſequitur, impoſſibilem eſſe rectam lineam, quæ omnium rectarum linearum poſſibilium minima ſit; ergo ſimiliter, ex eo quod quilibet numerus diuidi poſſit in duas, tres, quatuor, & quotlibet partes inter ſe æquales, quæ partes ſingulæ numeri ſint: legitimè ſequitur, impoſſibilem eſſe numerum, qui omnium poſſibilium numerorum minimus ſit; ergo omnium poſſibilium numerorum minimus, non eſt vnitas.

Ad propoſitam quæſtionem, neque affirmatiue, neque negatiue reſponderi poteſt: ſed diſtinctione opus eſt; itaque.

Dico primo. Magnitudine deſumpta ab ipſo numero, omnium numerorum poſſibilium minimus, eſt vnitas.

Dico ſecundo. Magnitudine deſumpta à valore numeri, omnium numerorum eiuſdem ſpeciei minimus eſt vnitas: verum data quauis vnitate cuiuſuis ſpeciei, dari poſſunt minores numeri alterius ſpeciei.

Pro intelligentia propoſitarum aſſertionum, aduertendum eſt: non minus vſitatum eſſe apud Arithmeticos, vnum numerum altero maiorem dicere, magnitudine deſumpta ab ipſo numero, quam magnitudine deſumpta à valore numeri: tamen iſtæ duæ magnitudines magnopere inter ſe differunt, quemadmodum inter ſe maxime differunt, numerus, & valor numeri. Exempli gratia, quando dicitur quod numerus 16 linearum ſit maior numero 12 ſuperficierum: agitur de magnitudine deſumpta ab ipſis numeris: hoc eſt, à ſubiectis habentibus terminationem; & ſenſus eſt, quod prior numerus indicet plura indiuidua, ſiue plura ſubiecta habentia terminationem, quam indicentur à ſecundo numero: neque ſignificatur quod prioris numeri valor ſit maior valore poſterioris numeri. Idem contingit, quando numerus 12 binariorum, dicitur maior, numero 10 ternariorum. Vel quando numerus 12 arenularum, dicitur maior, numero 10 cumulorum compoſitorum ex arenulis. Has aliaſque ſimiles loquutiones communiter vſitatas eſſe, manifeſtum arbitror: & conſequenter vſu receptum eſſe, vnum numerum altero maiorem dicere, magnitudine deſumpta ab ipſo numero: aliter enim

Digitized by Google

veræ dici non poſſent, in prædictis loquutionibus contentæ aſſertiones. Præterea, quando dicitur quod inter ſe æquales ſint ſubſequentes numeri $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$, &c. quodque ſinguli iſti numeri ſint maiores, quam ſubſequentes numeri $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{11}$, &c. agitur de magnitudine deſumpta à valore: & ſenſus eſt, quod omnes priores numeri æqualem valorem habeant; quodque ſinguli priores numeri, habeant maiorem valorem quam poſteriores. Idem accidit, quando numerus A dicitur æqualis numero B, vel maior numero C: ſuppoſito quod numerus A ſignificet 2 Scuta, & quod numerus B ſignificet 20 Iulios, quodque numerus C ſignificet 14 Iulios. Has & alias ſimiles loquutiones communi vſu admiſſas arbitror: quandoquidem enim apud Arithmeticos admittatur, non eſſe poſſibilem ſubtractionem ex qua relinquatur aliquod reſiduum, niſi quando minor numerus ex maiore ſubtrahitur: & etiam doceant ex $\frac{2}{4}$ ſubtrahendo $\frac{2}{5}$, relinqui aliquod reſiduum: atque ſimiliter ex 2 Scutis ſubtrahendo 14 Iulios, relinqui aliquod reſiduum: conſtat iuxta ipſos numerum $\frac{2}{4}$ eſſe minorem numero $\frac{2}{5}$: & numerum 2 Scutorum eſſe maiorem numero 14 Iuliorum: magnitudine tamen deſumpta à valore. Ex paucis quæ hic annotauimus, abundè conſtare arbitror, apud Arithmeticos vſitatum eſſe, vnum numerum altero maiorem dicere: tum magnitudine deſumpta ab ipſo numero, tum etiam magnitudine deſumpta à valore numeri; atque ſilentio inuoluo alia quam plurima, ex quibus idem poſſem inferre. Quod vnum numerum altero maiorem aſſerendo, vix vnquam expreſsè addant, de qua magnitudine loquantur: non male videtur fieri; quandoquidem ex circumſtantiis ſatis colligatur de qua magnitudine ſermo ſit; ſic etiam ego, in reflexione ſecunda, varios numeros conſidero, quos omnes inter ſe æquales aſſirmo, nulla addita diſtinctione: licet aliqui tantum æquales ſint magnitudine deſumpta ab ipſis numeris: alij vero tantum æquales ſint magnitudine deſumpta à valore. Idem alibi paſſim inuenies, tum in præcedenti Arithmetica, tum in noſtra Logiſtica.

Ex hac expoſitione diuerſarum magnitudinum, quarum vna, ab ipſo numero, altera à valore numeri dependet: manifeſtus eſt ſenſus duarum aſſertionum paulo ante adductarum, pro reſponſione ad propoſitam quæſtionem. Reliquum eſt, vt exponam quid dicendum ſit ad argumenta prius allata, atque iſtis aſſertionibus noſtris aduerſantia; tale nihil aduerto in tribus prioribus argumentis: etenim in primo, & ſecundo, tantum agitur de magnitudine numeri, quæ deſumitur ab ipſo numero: atque ſtabilitur prior aſſertio. In tertio argumento, agitur de magnitudine quæ deſumitur à valore nume-

numeri: atque probatur ſecunda aſſertio. Poſtremum argumentum, noſtris aſſertionibus aduerſatur: verum nihil contra nos euincit; proponit enim planè vitioſam paritatem, male deſumptam ab identitate vocis, quæ diuerſas ſignificationes admittit; etenim, toto vt ita dicam cælo, inter ſe diuerſa ſignificat, vox diuidere, quando quantitas continua, ſiue linea dicitur diuidi: & quando aliqua quantitas diſcreta, ſiue numerus a iquis, diuidi dicitur. Vt hæc diuerſitas melius appareat, iuuabunt ſequen·ia. Primo, qui continuam quantitatem diuidit, bene dicitur continuam quantitatem ſecare in partes: qui numerum diuidit, non bene dicitur numerum ſecare in partes. Secundo, quod producitur ex diuiſione quantitatis continuæ neceſſario eſt aliquid minus ipſa quantitate continua quæ diuiditur: quod producitur ex numero qui diuiditur, non eſt neceſſario minus numero qui diuiditur, ſed poteſt illo maius eſſe, vel illi æquari. Tertio, quando exempli gratia vna linea recta diuiditur in partes æquales, ſingulæ partes productæ ex diuiſione, neceſſario ſunt eiuſdem ſpeciei, cum linea quæ diuiditur: verum quando vnitas in partes æquales diuiditur, tunc partes productæ ex diuiſione, neceſſario ſpecie differunt ab vnitate quæ diuiditur. Quarto quantitatem continuam diuidere in partes, non eſt inſtituere regulam auream, ſiue tres quantitates datas inuenire quartam proportionalem: verum numerum diuidere, eſt inſtituere regulam auream, ſiue ad tres datas quantitates inuenire quartam proportionalem. Quinto impoſſibile eſt, vnam lineam diuidere per vnam, vel duas, vel tres alias lineas: non eſt impoſſibile vnam vnitatem diuidere per vnam, vel duas, vel tres alias vnitates. Singula quæ hic afferuntur de diuiſione quantitatis continuæ, intelligenda ſunt, de illa diuiſione de qua agitur in Geometria, quando demonſtratur, quamlibet rectam lineam diuidi poſſe in quotlibet partes æquales: de hac enim diuiſione agitur in propoſito argumento. Cæterum, etiam circa continuas quantitates inſtitui poteſt multiplicatio, & diuiſio, quæ circa numeros docetur in vulgari Arithmetica: vt pluribus exponitur in Logiſticæ Idea; immo iuxta nos quælibet quantitas, vel realiter, vel æquiualenter poteſt diuidi, per quamlibet aliam quantitatem, aut in illam duci, quod niſi verum foret, de quibuſcunque quantitatibus non verificarentur ſubſequentia theoremata; vera enim non forent de quantitatibus circa quas non poteſt inſtitui multiplicatio, aut diuiſio; placuit tamen ſingula proponere, atque demonſtrare, de quibuſcunque quantitatibus: quandoquidem non tantum pro numeris, verum etiam pro alijs quantitatibus vtilia ſint; atque non difficilius probentur de quantitatibus omnibus, quam de ſolis numeris. Vt

P 2 ſingu-

ſingula habeantur reſtricta ad ſolos numeros, in ipſis titulis, ſiue in hypotheſi, pro voce *quantitates*, ſufficit ſubſtituere vocem *numeri*.

Quatuor priora theoremata quæ ſubſequuntur, ſunt illa, in quibus fundantur ſolutiones quatuor primarum quæſtionum paulo ante propoſitarum: Quintum theorema, continet fundamentum problematis, quo hanc appendicem terminamus: in quo problemate ſimul proponuntur, varij, atque aliquantulum diuerſi modi inſtituendi Regulam Auream, de quibus hactenus egimus in præſenti opuſculo.

Pro vnoquoque theoremate, requiritur notitia Logiſticarum ſcriptionum: atque notandum eſt, quod quando ſucceſſiua ſcriptio, in qua inueniuntur plura membra particula *in* vel *per* connexa, nuſquam interrupta eſt particula *ſed*: tunc ſcriptio indicat, tum ipſas operationes inſtituendas, tum etiam ordinem quo illæ operationes ſucceſſiuè inſtituendæ ſunt; quoties vero, huiuſmodi ſucceſſiua ſcriptio interrupta eſt particula *ſed*, immediatè præpoſita particulæ *in* vel *per*: ſignificatur, illud quod præcedit particulam illam, *ſed*, multiplicari, vel diuidi debere, per illud quod ſequitur in eadem ſcriptione. Exempli gratia, ſcriptio A *in* B *per* C, ſignificat A ductum in B, atque hoc productum diuiſum per C: verum ſcriptio A *ſed in* B *per* C, ſignificat A ductum in productum ex B diuiſo per C. Similiter ſcriptio A *per* B *in* C, ſignificat A diuiſum per B, atque hoc productum ductum in C: verum ſcriptio A *ſed per* B *in* C, ſignificat A diuiſum per productum ex B ducto in C. Pari modo, ſcriptio A *per* B *per* C, ſignificat A diuiſum per B, atque hoc productum diuiſum per C. Verum A *ſed per* B *per* C, ſignificat A diuiſum per productum ex B diuiſo per C.

Indicatas ſcriptiones Logiſticas, adhibemus in demonſtrationibus ſubſequentium theorematum, tum ne cogamur interpoſitis lineolis, litteris litteras ſubſcribere, tum etiam ne æquiuocationi obnoxiæ ſint, quando ſcripto non exhibentur, ſed tantum ab alio lectæ audiuntur. Quatuor priorum theorematum aſſertiones, duplici diuerſa ſcriptione proponimus, vt legi poſſint, expreſſæ ea ſcriptione, quæ videbitur commodior.

Vt ex aſſertionibus duorum priorum theorematum, commode inferantur ſolutiones duarum priorum quæſtionum: reflectendum eſt ad primam aſſertionem quinti theorematis: in qua ſtatuitur, quod ſcriptio, B *in* C *per* A, ſignificet quartum terminum proportionalem, quoties primus eſt A, ſecundus B, tertius C. Ex quo patet eumdem illum quartum proportionalem terminum, indicari, à qualibet ſcriptione, quæ æquiualet ſcriptioni B *in* C *per* A; huic

ſcri-

Digitized by Google

ſcriptioni æquiualentes ſex aliæ ſcriptiones, proponuntur in ſecunda parte quinti theorematis, atque ſingulæ indicant aliquantulum diuerſum ordinem operationum, per quas ex datis tribus terminis inueniri poteſt quartus proportionalis. Hinc reſultat problema, quo præſentem appendicem claudimus, & continet ſeptem modos ſoluendi Regulam Auream, inter ſe aliquantulum diuerſos, atque hactenus ſeparatim propoſitos.

Theorema I.

Qualeſcunque ſint quantitates A, B, C.

Dico. B *in* C *per* A = B *ſed per* A *per* C ≏ C *ſed per* A *per* B.

Vel, quod idem eſt $\frac{B \text{ in } C}{A} = \frac{B}{A \text{ per } C}$ ≏ $\frac{C}{A \text{ per } B}$

Demonſtratio. Per coroll. theor. 3. partis 4 Ideæ Logiſticæ, B *in* C *per* A = B *per* A *in* C ≏ C *per* A *in* B: ſed, per axioma primum 3. partis 4. Ideæ Logiſticæ, B *per* A *in* C = C *ſed in* B *per* A, & etiam C *per* A *in* B = B *ſed in* C *per* A: ergo, B *in* C *per* A = C *ſed in* B *per* A ≏ B *ſed in* C *per* A: atqui, per theorema propoſitum cap. 7. ſiue pagina 57. huius opuſculi, C *ſed in* B *per* A = C *ſed per* A *per* B, & inſuper, B *ſed in* C *per* A = B *ſed per* A *per* C: ergo, B *in* C *per* A = B *ſed per* A *per* C ≏ C *ſed per* A *per* B. Quod erat demonſtrandum.

Theorema II.

Qualeſcunque ſint quantitates A, B, C.

Dico. B *in* C *per* A = 1 *per* A *in* B *in* C.

Vel quod idem eſt, $\frac{B \text{ in } C}{A} = \frac{1}{A}$ in B in C.

Conſtructio, B *in* C = D.

Demonſtratio. Per coroll. theor. 3 partis 4. Ideæ Logiſticæ, D *in* 1 *per* A = 1 *per* A *in* D: ſed, D *in* 1 *per* A = D *per* A: ergo, D *per* A = 1 *per* A *in* D, atqui per conſtructionem, B *in* C = D; ergo etiam B *in* C *per* A = 1 *per* A *in* B *in* C. Quod erat demonſtrandum.

Theo-

Digitized by Google

Theorema III.

Qualeſcunque ſint quantitates A & B.

Dico. A *per* B = 1 *per* B *in* A.

Vel, quod idem eſt, dico, $\frac{A}{B} = \frac{1}{B}$ in A.

Demonſtratio. Per axioma primum partis 4. Ideæ Logiſticæ, 1 *per* B *in* A = A *ſed in* 1 *per* B; ſed, per theorema propoſitum capite 7. ſiue pagina 57. huius opuſculi, A *ſed in* 1 *per* B = A *ſed per* B *per* 1 ♎ A *per* B; ergo, A *per* B = 1 *per* B *in* A. Quod erat demonſtrandum.

Theorema IV.

Qualeſcunque ſint quantitates A & B.

Dico. A *in* B = A *ſed per* 1 *per* B ♎ B *ſed per* 1 *per* A.

Vel, quod idem eſt dico, A *in* B = $\frac{A}{1 \text{ per } B}$ ♎ $\frac{B}{1 \text{ per } A.}$

Demonſtratio. Per theorema primum hic propoſitum A *in* B *per* 1 = A *ſed per* 1 *per* B ♎ B *ſed per* 1 *per* A: atqui, A *in* B *per* 1 = A *in* B; ergo, A *in* B = A *ſed per* 1 *per* B ♎ B *ſed per* 1 *per* A. Quod erat demonſtrandum.

Theorema V.

Qualeſcunque ſint quantitates A, B, C.

Dico primo. A *ad* B = C *ad* B *in* C *per* A.

Dico ſecundo. B *in* C *per* A = C *in* B *per* A ♎ B *per* A *in* C ♎ C *per* A *in* B ♎ B *ſed per* A *per* C ♎ C *ſed per* A *per* B ♎ 1 *per* A *in* B *in* C.

Prima aſſertio, demonſtrata eſt in theoremate 3, partis 4. Ideæ Logiſticæ. Ex eiuſdem theorematis corollario, vel ex primo, aut ſecundo theoremate hic propoſito, immediate patet ſecunda aſſertio. Etenim in ſecunda aſſertione contentam primam ſcriptionem, æquari, ſiue æquiualere, tribus alijs proxmè ſubſequentibus, conſtat ex corollario theorematis 3. partis 4. Ideæ Logiſticæ: eamdem primam ſcri-

ſcriptionem æquari, ſiue æquiualere, quintæ & ſextæ ſcriptioni, oſtenſum eſt in primo theoremate hic propoſito; denique eamdem primam ſcriptionem, æquari, ſiue æquiualere ſeptimæ ſcriptioni, docetur in ſecundo theoremate hic propoſito, atque adeo patet, omnes ſeptem ſcriptiones hic propoſitas, æquari, ſiue æquiualere inter ſe.

Problema.

Continens ſeptem diuerſas ſolutiones Regulæ Aureæ.

Dati ſint quiuis tres numeri, quorum primus ſit A, ſecundus B, tertius C.

Oporteat inuenire quartum numerum proportionalem.

In exemplo vniuſcuiuſque ſolutionis, ſupponitur, quod numerus A ſit 12; numerus B ſit 8; numerus C ſit 6;

Prima ſolutio. Secundus numerus B, ducatur in tertium numerum C: deinde productum ex hac multiplicatione, diuidatur per primum numerum A. Exempli gratia, 8 ductum in 6 dat 48: deinde 48 diuiſum per 12 dat 4; adeoque quartus proportionales eſt 4.

Secunda ſolutio. Tertius numerus C ducatur in ſecundum B: deinde productum ex hac multiplicatione diuidatur per primum numerum A. Exempli gratia, 6 ductum in 8 dat 48: deinde 48 diuiſum per 12, dat numerum 4; qui eſt quartus proportionalis.

Tertia ſolutio. Secundus numerus B diuidatur per primum A: deinde productum ex hac diuiſione ducatur in tertium numerum C. Exempli gratia, 8 diuiſum per 12 dat $\frac{2}{3}$: deinde $\frac{2}{3}$ ducendo in 6, producitur numerus 4; qui eſt quartus proportionalis.

Quarta ſolutio. Tertius numerus C diuidatur per primum numerum A: deinde productum ex hac diuiſione ducatur in ſecundum numerum B. Exempli gratia, 6 diuiſum per 12 dat $\frac{1}{2}$: deinde $\frac{1}{2}$ ducendo in numerum 8, producitur numerus 4; qui eſt quartus proportionalis.

Quinta ſolutio. Primus numerus A diuidatur per tertium numerum C; Deinde per productum ex hac diuiſione diuidatur ſecundus numerus B. Exempli gratia, 12 diuiſum per 6 dat 2: Deinde 8 diuidẽdo per 2 producitur numerus 4; qui eſt quartus proportionalis.

Sexta ſolutio. Primus numerus A diuidatur per ſecundum numerum B: deinde per productum ex hac diuiſione diuidatur tertius

nu-

Digitized by Google

numerus C. Exempli gratia 12 diuiſum per 8 dat $1\frac{1}{2}$; deinde 6 diuidendo per $1\frac{1}{2}$ producitur numerus 4; qui eſt quartus Proportionalis.

Septima ſolutio, Inuertatur primus numerus A, vt eius numerator fiat denominator, & eius denominator fiat numerator, atque vocetur aſſumptus numerus. Deinde aſſumptus numerus ducatur ſucceſſiuè in ſecundum & tertium numerum. Exempli gratia inuertendo numerum 12, habetur $\frac{1}{12}$ & aſſumptus numerus erit $\frac{1}{12}$; hunc numerum ducendo in 6 habetur $\frac{1}{2}$: deinde $\frac{1}{2}$ ducendo in 8, producitur numerus 4; qui eſt quartus proportionalis. Similiter $\frac{1}{12}$ ducendo in 8, habetur numerus $\frac{2}{3}$: quem ducendo in 6 producitur numerus 4; qui eſt quartus proportionalis.

Digitized by Google

Errata	Sic Corrige.
Pag. 5. Linea 2. 7. 036258. &c.	7. 032658. &c.
Pag. 19. Linea 36. à numero deorſum	à numero 3. deorſum
Pag. 29. Linea 11. erit $5\frac{1}{23}$	erit $5\frac{1}{4}$
Pag. 29. Linea 12. producat $5\frac{1}{23}$	Producat $5\frac{3}{4}$
Pag. 39. Linea 10. 1. 29	1. 39
Pag. 39. Linea 11. 2. 74	2. 78
Pag 48. Linea 32. duæ factiones	duæ fractiones.

Digitized by Google

A01 1462190

Digitized by Google

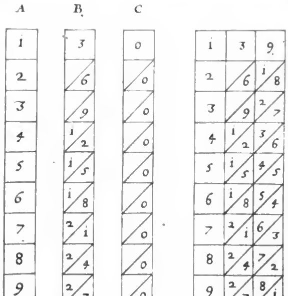


Fig. 1.ª *Fig. 2.ª*

BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE III
NAPOLI

XXXII.
D
16

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google